



Una contribución al aprendizaje significativo del Cálculo Integral

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Autores

Maestros

Patricia Rodríguez González

Santiago Neira Rosales

Silvia del Socorro Arguez Morales

Alumnos

Héctor José Vargas Ruiz

David Alejandro Cavazos Rubio

Oscar Alejandro Hernández Rodríguez

Fernando Iván Herrera Gamiño



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Una contribución al aprendizaje significativo del Cálculo Integral

Maestros

Patricia Rodríguez González

Santiago Neira Rosales

Silvia del Socorro Arguez Morales

Alumnos

Héctor José Vargas Ruiz

David Alejandro Cavazos Rubio

Oscar Alejandro Hernández Rodríguez

Fernando Iván Herrera Gamiño

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

Una contribución al aprendizaje significativo del Cálculo Integral

Maestros

Patricia Rodríguez González

Santiago Neira Rosales

Silvia del Socorro Argaez Morales

Alumnos

Héctor José Vargas Ruiz

David Alejandro Cavazos Rubio

Oscar Alejandro Hernández Rodríguez

Fernando Iván Herrera Gamiño



**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**



Rogelio G. Garza Rivera
Rector

Santos Guzmán López
Secretario General

Arnulfo Treviño Cubero
Director de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Luis E. Todd
Divulgación Científica

Juan Roberto Zavala Treviño
Coordinador del Programa "Escribe tus libros de texto"

Edith Flores Ceballos
Organización y Revisión Editorial

Rodrigo Soto Moreno
Coordinación Digital

Una contribución al aprendizaje significativo del Cálculo Integral
Primera edición, 2020

© Universidad Autónoma de Nuevo León

© Patricia Rodríguez González

© Santiago Neira Rosales

© Silvia del Socorro Arguez Morales

© Héctor José Vargas Ruiz

© David Alejandro Cavazos Rubio

© Oscar Alejandro Hernández Rodríguez

© Fernando Iván Herrera Gamiño

ISBN:

Reservados todos los derechos conforme a la ley
Prohibida la reproducción de este texto sin autorización por escrito del editor

Impreso en Monterrey, México
Printed in Monterrey, Mexico

Contenido

Prólogo

Introducción.....

Unidad Temática 1

Cálculo Integral para funciones de una variable

Capítulo 1. Integral definida.....

- 1.1 Antiderivada y reglas básicas de integración.....
- 1.2 Soluciones particulares y condiciones iniciales.....
- 1.3 Cambio de variable.....
- 1.4 Integrales en donde intervienen funciones trascendentales
 - a) Integrales de la forma $\int \frac{du}{u}$
 - b) Integrales de la forma $\int e^u du$
 - c) Integrales de la forma $\int a^u du$
 - d) Integrales de funciones trigonométricas.....
 - e) Integrales de funciones hiperbólicas.....
 - f) Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas
inversas e hiperbólicas inversas.....
- 1.5 Notación sigma.....
- 1.6 Integral definida.....
- 1.7 Teorema fundamental del cálculo.....

Capítulo 2. Métodos de integración.....

- 2.1 Integración por partes.....
- 2.2 Método de integración de potencias de funciones trigonométricas
- 2.3 Sustituciones trigonométricas.....
- 2.4 Integración de funciones racionales.....

Capítulo 3. Aplicaciones de la integral definida.....

- 3.1 Área entre dos curvas.....
- 3.2 Volumen de un sólido de revolución.....
 - Método del disco y de arandela
 - Método de la corteza cilíndrica
- 3.3 Longitud de arco.....
- 3.4 Trabajo.....

Unidad Temática 2

Cálculo Integral para funciones de dos o más variables

Capítulo 4. Integración múltiple.....

- 4.1 Integrales iteradas.....
 - Introducción
 - Concepto
- 4.2 Integrales dobles.....
- 4.3 Integrales triples.....

Anexo

Formulario.....

Bibliografía.....

PRÓLOGO

El presente libro constituye una evidencia de lo trascendente que resulta la promoción del aprendizaje significativo en las aulas de nuestra institución. Este es el sustento del enfoque constructivista del Modelo Educativo de la Universidad Autónoma de Nuevo León, la cual, en su Visión 2030 destaca la importancia de ofrecer una educación de calidad, incluyente y equitativa, que busca trascender por sus aportaciones a la transformación del entorno social.

Esta obra, coordinada por la MC. Patricia Rodríguez González, muestra el compromiso y dedicación de los autores MC. Patricia Rodríguez González, MC. Santiago Neira Rosales y Dra. Silvia del Socorro Argaez Morales y los estudiantes colaboradores Héctor José Vargas Ruiz, David Alejandro Cavazos Rubio, Óscar Alejandro Hernández Rodríguez y Fernando Iván Herrera Gamiño, haciendo de esta, una gran contribución a la divulgación de la ciencia, lo que facilita el acceso del conocimiento a una mayor audiencia.

Durante su formación, los estudiantes deberán desarrollar competencias generales, específicas y particulares, para lograr el perfil de egreso. Cabe destacar la necesidad de que desarrollen otras habilidades de gran importancia como son: el aprender a aprender y la metacognición, las cuales serán herramientas para su formación durante toda la vida.

La Universidad Autónoma de Nuevo León está comprometida principalmente con los jóvenes; este compromiso radica en permitirles identificar sus talentos, guiarlos y orientarlos para que desarrollen sus capacidades al máximo y con ello mejorar sus condiciones de vida. Pero también tomando responsabilidad en la formación de profesionistas competentes, con cuyo desempeño responsable se logre el desarrollo de la sociedad en general.

Mtro. Rogelio G. Garza Rivera
Rector de la Universidad Autónoma de Nuevo León

INTRODUCCIÓN

El libro “UNA CONTRIBUCIÓN AL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL CÁLCULO INTEGRAL” pone de manifiesto una visión personal de los autores, respecto a la temática de la unidad de aprendizaje de Matemáticas II, en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. El texto fue elaborado con un enfoque práctico donde, a partir de una breve introducción teórica de los temas, se va guiando al estudiante a conformar su propio aprendizaje.

Las actividades y los ejercicios propuestos, promueven la adquisición del aprendizaje significativo del Cálculo Integral, en el marco del Modelo Educativo que promueve la UANL, basado en el desarrollo de competencias. En el diseño de estas actividades se consideraron los siguientes aspectos: El Saber, El Saber Hacer y El Saber Ser, donde el estudiante deberá adquirir conocimientos generales y específicos de la unidad de aprendizaje, deberá adquirir destrezas técnicas y procedimentales para dar solución a los problemas y deberá desarrollar actitudes y competencias sociales que le permitan interactuar responsablemente en el entorno que lo rodea.

Los ejercicios presentan las diferentes variantes en las problemáticas de cada tema, de manera que el interesado va involucrándose gradualmente con la temática, teniendo la oportunidad de construir su propio conocimiento mediante la realización de prácticas que el libro le sugiere con este propósito. También se consideró incluir la solución de los ejercicios, para facilitar al estudiante la autorregulación de su propio aprendizaje.

El libro está organizado en cuatro capítulos: Integral definida, Métodos de integración, Aplicaciones de la integral definida e Integración múltiple. Cabe destacar la relevancia que se ha dado a la aplicación del conocimiento en contextos reales y prácticos.

La edición de esta obra estuvo a cargo del Programa “Escribe Tus Libros de Texto” de la UANL y con toda seguridad el contenido aportará, con solidez, al desarrollo de las competencias del perfil de egreso, de ingenieros capacitados para contribuir con un alto grado de responsabilidad, a mejorar el nivel de vida de nuestro país.

Dr. Arnulfo Treviño Cubero
Director de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

UNIDAD TEMÁTICA 1
CÁLCULO INTEGRAL PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE



Capítulo 1

Integración Definida

Competencia particular 1

Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo mediante el uso de las reglas básicas de integración y el cambio de variable para evaluar integrales definidas.

Elemento de competencia 1

Definir el concepto de antiderivada a través de su relación con la derivada para resolver integrales indefinidas.

Conocimiento previo

Derivadas de funciones algebraicas y relación entre derivada y diferencial.

Actividad No. 1	Conocimiento previo	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar detalladamente las reglas de derivación y expresar el resultado en diferenciales.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la solución correcta de los ejercicios.		
Tiempo estimado para la actividad: 20 minutos.		

Descripción de la actividad

Aplica las reglas de derivación dadas (paso por paso), en cada uno de los ejercicios propuestos y expresa el resultado en diferenciales, como se muestra en el ejemplo.

Reglas de derivación:

- 1) $D_x(c) = 0$, en donde $c = \text{constante}$
- 2) $D_x(x) = 1$
- 3) $D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]$
- 4) $D_x[UV] = UD_x[V] + VD_x[U]$, en donde U y V son funciones de x
- 5) $D_x\left[\frac{U}{V}\right] = \frac{VD_x[U] - U D_x[V]}{V^2}$
- 6) $D_x[U^n] = n U^{n-1} D_x(U)$

EJEMPLO

Calcula el diferencial de la siguiente función.

$$y = (2x + 3)(x - 1)$$

Primero calculamos su derivada.

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 3)D_x(x - 1) + (x - 1)D_x(2x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 3)(1) + (x - 1)(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3 + 2x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 1$$

SOLUCIÓN

$$dy = (4x + 1)dx$$

EJERCICIO

Calcula el diferencial en cada una de las siguientes funciones.

$$1) y = 3x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7 \quad 2) y = \sqrt{x^2 + 4} \quad 3) y = (x^2 + 3)(2x - 1)$$

$$4) y = \frac{5x+1}{3x-2} \quad 5) y = \frac{3}{(2x+1)^2}$$

1.1 ANTIDERIVADA Y REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

$F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x) + C$ se le llama la antiderivada más general de $f(x)$, siendo C cualquier constante.

Si la antiderivada de $f(x)$ es $F(x) + C$, esto se representa como:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

En donde:

$\int$ Se llama antiderivada, integral indefinida o primitiva.

$f(x)$ Se llama integrando.

C Se llama constante de integración.

dx Se llama diferencial de x e indica cuál es la variable de integración.

Tabla 1. Reglas básicas de integración
1. $\int dx = x + C$ C es una constante
2. $\int K dx = Kx + C$ K es una constante
3. $\int K f(x) dx = K \int f(x) dx$
4. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

NOTA: Los resultados se deben expresar sin exponentes negativos y sin fracciones en el denominador.

EJEMPLO 1

Encuentra la antiderivada más general para la función:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^5}$$

$$f(x) = \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}}$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9} x^{\frac{9}{4}} + C$$

EJEMPLO 2

A continuación se resolverán integrales indefinidas, usando o aplicando solamente las reglas básicas de integración.

$$\text{a) } \int dw = w + C \quad \text{Aplicando la regla No. 1}$$

$$\text{b) } \int 5 dy = 5y + C \quad \text{Aplicando la regla No. 2}$$

$$\text{c) } \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C \quad \text{Aplicando la regla No. 5}$$

$$\text{d) } \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2x^2} + C \quad \text{Aplicando la regla No. 5}$$

$$\text{e) } \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} x^{5/3} + C \quad \text{Aplicando la regla No. 5}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int 5x^4 dx &= 5 \int x^4 dx && \text{Aplicando la regla No. 3} \\ &= 5 \left(\frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 \right) = 5 \left(\frac{x^5}{5} \right) + 5C_1 && \text{Aplicando la regla No. 5} \\ &= x^5 + C && \text{Haciendo } 5C_1 = C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \int \frac{dx}{4\sqrt{x}} &= \frac{1}{4} \int x^{-1/2} dx && \text{Aplicando la regla No. 3} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) + C && \text{Aplicando la regla No. 5} \\ &= \frac{1}{4} (2x^{1/2}) + C = \frac{1}{2} x^{1/2} + C = \frac{1}{2} \sqrt{x} + C && \text{Simplificando} \end{aligned}$$

$$h) \int (3x^2 + 5x - 2)dx = \int 3x^2 dx + \int 5x dx - \int 2 dx \quad \text{Aplicando la regla No.4}$$

$$= 3 \int x^2 dx + 5 \int x dx - 2 \int dx \quad \text{Aplicando la regla No. 3}$$

$$= 3 \left[\left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right) + C_1 \right] + 5 \left[\left(\frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + C_2 \right] - 2x + C_3$$

Aplicando las reglas No. 5 y No. 2 y como $3C_1 + 5C_2 + C_3 = C$, resulta:

$$= 3 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 5 \left(\frac{x^2}{2} \right) - 2x + C \quad \text{Simplificando}$$

$$= x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + C$$

Observa que en los siguientes ejemplos primero se realiza la operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplican las reglas básicas de integración.

$$i) \int (2y - 1)(3y + 2)dy = \int (6y^2 + y - 2)dy \quad \text{Multiplicando los binomios}$$

$$= \int 6y^2 dy + \int y dy - \int 2 dy$$

$$= 6 \int y^2 dy + \int y dy - 2 \int dy$$

$$= 6 \left(\frac{y^{2+1}}{2+1} \right) + \frac{y^{1+1}}{1+1} - 2y + C$$

$$= 6 \left(\frac{y^3}{3} \right) + \frac{y^2}{2} - 2y + C$$

$$= 2y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 2y + C$$

$$j) \int (x^2 - 3)^2 dx = \int (x^4 - 6x^2 + 9) dx \quad \text{Desarrollando el binomio al cuadrado}$$

$$= \int x^4 dx - \int 6x^2 dx + \int 9 dx$$

$$= \int x^4 dx - 6 \int x^2 dx + 9 \int dx$$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} - 6 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right) + 9x + C$$

$$= \frac{x^5}{5} - 6 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 9x + C$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 9x + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } \int \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5} \right) dx &= \int \left[\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)} \right] dx = \int (x + 5) dx && \text{Simplificando la fracción} \\
 &= \int x dx + \int 5 dx = \int x dx + 5 \int dx \\
 &= \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5x + C = \frac{1}{2}x^2 + 5x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) } \int \left(\frac{2z+4}{\sqrt{z}} \right) dz &= \int z^{-\frac{1}{2}}(2z + 4) dz = \int (2z^{1/2} + 4z^{-1/2}) dz && \text{Simplificando la fracción} \\
 &= \int 2z^{1/2} dz + \int 4z^{-1/2} dz \\
 &= 2 \int z^{1/2} dz + 4 \int z^{-1/2} dz \\
 &= 2 \left(\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) + 4 \left(\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + C \\
 &= 2 \left(\frac{z^{3/2}}{3/2} \right) + 4 \left(\frac{z^{1/2}}{1/2} \right) + C \\
 &= 2 \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) + 4(2z^{1/2}) + C \\
 &= \frac{4}{3} z^{3/2} + 8z^{1/2} + C
 \end{aligned}$$



Comprobación de resultados. En este Q_R se comprueba el resultado de una integral, derivando la antiderivada para encontrar el integrando o la función de dicha integral.

EJERCICIO 1.1

I. Encuentra la antiderivada más general de cada función, aplicando paso por paso las reglas arriba mencionadas y expresa el resultado sin exponentes negativos ni fracciones en el denominador.

1) $f(x) = 10x^5 + 2$

2) $s(t) = t^2 - \frac{t}{2} + \sqrt{t}$

3) $f(r) = 5r^2 + \frac{1}{r^3} - 4$

4) $f(x) = x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$

5) $g(S) = \frac{1}{S^2} - 2\sqrt{S} + 1$

6) $f(\theta) = \theta^{1/3} + 14\theta^{5/2} + \frac{1}{\theta^2}$

II. Resuelve cada una de las siguientes antiderivadas y expresa el resultado sin exponentes negativos ni fracciones en el denominador.

7) $\int dz$

8) $\int \frac{dx}{3}$

9) $\int 4x\sqrt{x}dx$

10) $\int (2x + 1)dx$

11) $\int (2\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x})dx$

12) $\int \frac{5}{x^3} dx$

13) $\int \left(\frac{w^2 + 4w - 3}{w^4} \right) dw$

14) $\int \left(\frac{x^2 - x - 12}{x + 3} \right) dx$

15) $\int (4y - 1)(3y + 4)dy$

16) $\int \sqrt[4]{z^3} (3z - 4)dz$

17) $\int (2x + 3)^2 dx$

18) $\int (x - 1)^3 dx$

SOLUCIÓN

1) $\frac{5}{3}x^6 + 2x + C$

2) $\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{2}{3}t^{3/2} + C$

3) $\frac{5}{3}r^3 - \frac{1}{2r^2} - 4r + C$

4) $\frac{1}{3}x^3 + 6x^{1/2} + C$

5) $\frac{-1}{S} - \frac{4}{3}S^{3/2} + S + C$

6) $\frac{3}{4}\theta^{4/3} + 4\theta^{7/2} - \frac{1}{\theta} + C$

7) $z + C$

8) $\frac{1}{3}x + C$

9) $\frac{8}{5}x^{5/2} + C$

10) $x^2 + x + C$

11) $\frac{3}{2}x^{4/3} - 4x^{3/2} + C$

12) $\frac{-5}{2x^2} + C$

13) $\frac{-1}{w} - \frac{2}{w^2} + \frac{1}{w^3} + C$

14) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + C$

15) $4y^3 + \frac{13}{2}y^2 - 4y + C$

16) $\frac{12}{11}z^{11/4} - \frac{16}{7}z^{7/4} + C$

17) $\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x + C$

18) $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$

Actividad No. 2	Desarrollo	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar correctamente las reglas básicas para resolver integrales indefinidas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el listado que contenga los errores presentados en la solución de cada integral indefinida, así como su justificación para corregirlos.		
Tiempo estimado para la actividad: 15 minutos.		

Descripción de la actividad

I. En esta actividad se te presentan 3 integrales indefinidas resueltas que presentan errores en su solución. Debes encontrar dichos errores y describir cómo se pueden corregir.

$$1) \int (2 + 3x) dx = 2 \int 3x dx = 6 \int x dx = 6 \left(\frac{x^2}{2} \right) + C = 3x^2 + C$$

$$2) \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right) + C = \frac{1}{6} x^3 + C$$

$$3) \int \left(3x^2 - \frac{x}{4} - 1 \right) dx = \int 3x^2 dx - \int \frac{x}{4} dx + \int dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + \int dx$$

$$= 3 \left(\frac{x^3}{3} \right) - 4 \left(\frac{x^2}{2} \right) + x + C = x^3 + 2x^2 + x + C$$

II. Retroalimentación.

Actividad No. 3	Desarrollo	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar correctamente las reglas básicas para resolver integrales indefinidas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga la identificación correcta de la o las reglas básicas de integración aplicada en cada paso.		
Tiempo estimado para la actividad: 10 minutos.		

Descripción de la actividad

- I. En esta actividad se te presentan integrales indefinidas resueltas correctamente, en donde debes identificar la o las reglas básicas aplicadas en cada paso y escribirla (s) al lado derecho.

$$\int (6x^2 - 4x + 1)dx$$

$$\int 6x^2 dx - \int 4x dx + \int dx \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$6 \int x^2 dx - 4 \int x dx + \int dx \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$6 \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} \right) - 4 \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} \right) + x + C \quad \underline{\hspace{10cm}}$$

$$6 \left(\frac{x^3}{3} \right) - 4 \left(\frac{x^2}{2} \right) + x + C$$

$$2x^3 - 2x^2 + x + C$$

II. Retroalimentación.

1.2 SOLUCIONES PARTICULARES Y CONDICIONES INICIALES

Existen en matemáticas las llamadas ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial es aquella que contiene derivadas y puede tener una solución general o una solución particular.

Si $\frac{dy}{dx} = f(x)$ es una ecuación diferencial

$dy = f(x)dx$ Despejando dy

$\int dy = \int f(x)dx$ Integrando a ambos lados de la ecuación

$y = \int f(x)dx + C$ Ésta se llama solución general de la ecuación diferencial

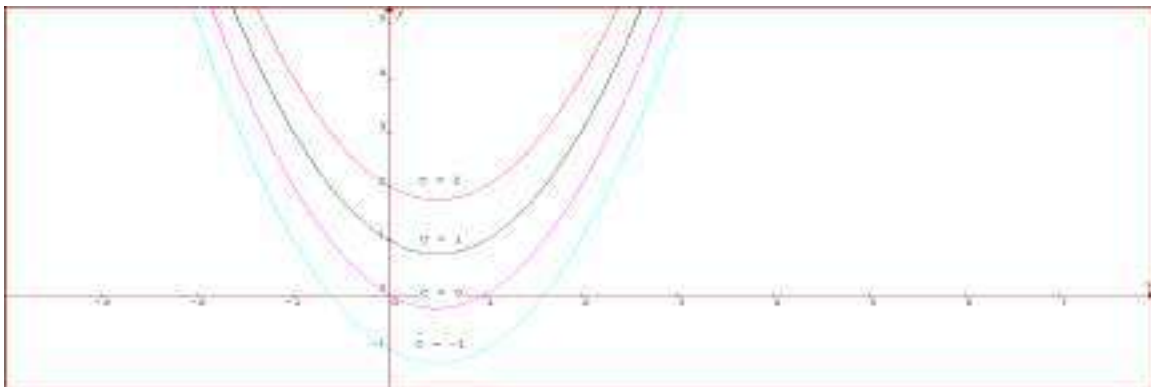
La ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$ admite un número infinito de soluciones particulares, las cuales difieren en una constante entre sí. Sus gráficas son traslaciones verticales una de otra.

Por ejemplo, si $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$, la solución general está dada por:

$$y = x^2 - x + C$$

De hecho, el número infinito de soluciones particulares proviene del número infinito de valores que puede tomar la constante C .

La siguiente ilustración muestra la gráfica de $y = x^2 - x + C$ para diferentes valores de C .



Para determinar la solución particular, debemos conocer una o varias condiciones iniciales, dependiendo del número de constantes que intervengan en la solución general.

En el ejemplo anterior, se necesita una sola condición inicial, ya que solo aparece una constante “C” en la solución general. Entonces, si la gráfica de $y = \int (2x - 1)dx$ debe pasar por el punto $P(1,2)$, resulta que la solución general es:

$$y = x^2 - x + C$$

La condición inicial es:

Si $x = 1, y = 2$, sustituyendo en la solución general, resulta:

$2 = (1)^2 - 1 + C$, despejando, resulta que $C = 2$ y la solución particular está dada por:

$$y = x^2 - x + 2$$

A partir de esta solución particular se puede responder a los siguientes cuestionamientos:

- a) Calcular el valor de la ordenada del punto A si su abscisa es 3.

SOLUCIÓN

Si $x = 3, y = (3)^2 - 3 + 2; y = 8$, por lo tanto, el punto A está dado por: $A(3,8)$

- b) Calcular el valor de la o las abscisas del punto B si su ordenada es 4.

SOLUCIÓN

Haciendo $y = 4$ en la solución general, queda:

$$x^2 - x + 2 = 4$$

Simplificando e igualando a cero:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Factorizando:

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

Igualando a cero cada factor y despejando, resultan las abscisas:

$$x = 2 \text{ y } x = -1$$

El punto B está dado por:

$$B(2,4) \text{ o } B(-1,4)$$

Para resolver los problemas razonados se sugiere el siguiente procedimiento.

Paso 1

Identificar o determinar la ecuación diferencial que plantea el problema.

Paso 2

Establecer las condiciones iniciales. Análisis de datos.

Paso 3

Expresar la ecuación con diferenciales.

Paso 4

Integrar ambos lados de la ecuación, colocando solo una constante " C " y se obtendrá la solución general.

Paso 5

Sustituir las condiciones iniciales en la solución general para calcular la o las constantes y así, determinar la solución particular.

Paso 6

Responder a los cuestionamientos, si es que los hay.

EJEMPLO 1

Encuentra una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

$$f''(x) = 2; f'(1) = 3; f(2) = 5$$

SOLUCIÓN

Considerando que $f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$, entonces:

$$\frac{d}{dx}[f'(x)] = 2 \quad \text{Expresando en diferenciales}$$

$$d[f'(x)] = 2dx \quad \text{Integrando ambos lados de la ecuación}$$

$$f'(x) = 2x + C_1 \quad \text{Primera solución general}$$

Antes de volver a integrar para conocer $f(x)$, se debe sustituir la condición inicial dada para calcular C_1 .

La condición inicial es:

Si $x = 1; f'(x) = 3$, sustituyendo en $f'(x) = 2x + C_1$ y despejando C_1 , queda:

$$3 = 2(1) + C_1$$

$$C_1 = 1$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = 2x + 1$$

Ahora se considera que $f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]$ entonces, sustituyendo $f'(x)$:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = 2x + 1 \quad \text{Expresando en diferenciales}$$

$$d[f(x)] = (2x + 1)dx \quad \text{Integrando ambos lados de la ecuación}$$

$$f(x) = x^2 + x + C_2 \quad \text{Solución general}$$

Sustituyendo la condición inicial dada: Si $x = 2; f(x) = 5$, se despeja C_2

$$5 = (2)^2 + 2 + C_2$$
$$C_2 = -1$$

La función f que cumple con las condiciones dadas es:

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

EJEMPLO 2

Cierta compañía estima que el costo marginal $C'(x)$ para producir x artículos está dado por $C'(x) = -0.004x + 2.03$. Si el costo de producción de un artículo es de 350 dólares, encuentra el costo $C(x)$ de producir 100 artículos.

SOLUCIÓN

Paso 1

Considerando que $C'(x) = \frac{dC}{dx}$, la ecuación diferencial dada es:

$$\frac{dC}{dx} = -0.004x + 2.03$$

Paso 2

Condiciones iniciales: Si $x = 1, C(x) = 350$ dólares

Paso 3

Despejando los diferenciales, queda:

$$dC = (-0.004x + 2.03)dx$$

Paso 4

Integrando ambos lados de la ecuación y simplificando, resulta la solución general:

$$\int dC = \int (-0.004x + 2.03)dx$$
$$C(x) = -0.002x^2 + 2.03x + C_1$$

Paso 5

Se sustituye la condición inicial: $x = 1$ y $C(x) = 350$ y se despeja C_1 :

$$350 = -0.002(1)^2 + 2.03(1) + C_1$$

$$C_1 = 350 + 0.002 - 2.03 = 347.97$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$C(x) = -0.002x^2 + 2.03x + 347.97$$

Paso 6

Respondiendo al cuestionamiento, se evalúa $C(100)$ y se obtiene:

$$C(100) = -0.002(100)^2 + 2.03(100) + 347.97 = 530.97$$

El costo de producir 100 artículos es de:

$$C(100) = 530.97 \text{ dólares}$$

EJEMPLO 3

El cambio de presión $\left(\frac{dP}{dt}\right)$, en Pascales por segundo, en una tubería de agua es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de " t ", en donde " t " es el tiempo en segundos. Cuando la llave está cerrada, se considera que no hay presión en la tubería y cuando se abre la llave y transcurre un segundo la presión es de 2 Pascales. Determina la presión a los 9 segundos de abrir la llave.

SOLUCIÓN

La ecuación diferencial está dada por:

$$\frac{dP}{dt} \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K}{\sqrt{t}}$$

Las condiciones iniciales son:

1) Cuando $t = 0, P = 0$

2) Cuando $t = 1 \text{ s.}; P = 2 \text{ Pascales}$

$$dP = \frac{K}{\sqrt{t}} dt$$

Despejando diferenciales

$$\int dP = \int \frac{K}{\sqrt{t}} dt$$

Integrando a ambos lados de la ecuación

$$P = 2K\sqrt{t} + C$$

Solución general

Sustituyendo la condición inicial 1 y despejando “C”, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= 2K\sqrt{0} + C \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la solución general, queda:

$$P = 2K\sqrt{t}$$

Sustituyendo la condición inicial 2 en la ecuación anterior y despejando “K”, queda:

$$2 = 2K\sqrt{1}$$

$$K = 1$$

La solución particular es:

$$P = 2\sqrt{t}$$

Para responder al cuestionamiento, se sustituye $t = 9$ en la solución particular y se calcula “P”:

$$P = 2\sqrt{9} = 2(3) = 6 \text{ Pascales}$$

EJEMPLO 4

Se deja caer un objeto desde una altura de 30 metros. Calcula la velocidad al momento del impacto con el suelo.

SOLUCIÓN

Cuando es caída libre, se parte de que la aceleración es de -9.8 m/s^2 y la ecuación diferencial está dada por $a = \frac{dv}{dt}$, por lo tanto:

$$\frac{dv}{dt} = -9.8$$

Las condiciones iniciales son:

Cuando $t = 0, v = 0; s = 30 \text{ metros}$, en donde: “ t ” es el tiempo en segundos; “ v ” es la velocidad en metros por segundo y “ s ” es la altura en metros.

$$dv = -9.8 dt$$

Despejando diferenciales

$$\int dv = \int -9.8 dt$$

Integrando ambos lados de la ecuación

$$v = -9.8t + C_1 \quad (\text{Ec. 1})$$

Solución general

Sustituyendo $t = 0$ y $v = 0$ en la Ec. 1 y despejando “ C_1 ”, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= -9.8(0) + C_1 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación de la velocidad está dada por:

$$v(t) = -9.8 t$$

Para responder al cuestionamiento es necesario conocer el tiempo que tarda en recorrer 30 metros, por lo tanto, se considera:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{\text{Cambio de posición}}{\text{Cambio de tiempo}}$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.8 t$$

Ecuación diferencial

$$ds = -9.8 t dt$$

Despejando diferenciales

$$\int ds = \int -9.8 t dt$$

Integrando ambos lados de la ecuación

$$s = -4.9 t^2 + C_2 \text{ (Ec. 2)}$$

Solución general

Sustituyendo $t = 0$ y $s = 30$ en la Ec. 2 y despejando C_2 , resulta:

$$30 = -4.9(0)^2 + C_2$$

$$C_2 = 30$$

Por lo tanto, la función de posición es:

$$s(t) = -4.9 t^2 + 30$$

Para calcular el tiempo que tarda en recorrer los 30 metros, se considera $s(t) = 0$ y se despeja “ t ”.

$$0 = -4.9 t^2 + 30$$

$$t = \sqrt{\frac{30}{4.9}} \cong 2.47 s$$

La velocidad al momento del impacto es:

$$v(2.47) \cong -9.8(2.47) \cong -24.20 m/s$$

EJERCICIO 1.2

Encuentra la solución particular de $y = \int f(x)dx$ si su gráfica debe pasar por el punto indicado.

1) $f(x) = 6x - 3$ $P(1, -2)$

2) $f(x) = 3\sqrt{x}$ $P(4, 3)$

3) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ $P(0, 1)$

Encuentra la función que cumple con las condiciones dadas.

4) $f'(x) = -3$; $f(1) = 4$

5) $f''(x) = 2$; $f'(2) = 1$; $f(1) = 0$

6) $f''(x) = 6x + 4$; $f'(0) = 3$; $f(1) = -1$

Movimiento rectilíneo

En los ejercicios del 9 al 11 considera el movimiento de un objeto a lo largo del eje X , donde $s(t)$ es la posición del objeto en el tiempo " t ", $s'(t)$ su velocidad y $s''(t)$ su aceleración.

7) Un automóvil parte del reposo y su aceleración está dada por:

$$a(t) = 6t^2 - 18t + 1, \text{ en } m/s^2$$

Si recorre 200 metros en 5 segundos, calcula:

- a) Su velocidad a los 5 segundos.
- b) Su posición a los 10 segundos.

8) La velocidad de una partícula está dada por $v(t) = \frac{450}{\sqrt{t}}$, en metros por segundo y para $t > 0$. Al transcurrir 4 segundos ha recorrido 100 metros. Calcula:

- a. El tiempo que tarda en recorrer 400 metros.
- b. La aceleración a los 4 segundos.
- c. La velocidad cuando la aceleración es de $-5 m/s^2$

Crecimiento poblacional

La tasa de crecimiento poblacional dP/dt es directamente proporcional a la población P en el instante t . Se expresa como:

$$\frac{dP}{dt} = K P$$

- 9) Si en el año 1990 la población de cierto país era de 500 000 habitantes y en el 2010 la población se ha incrementado a 650 000 habitantes, cuál será su población en el año 2030?
- 10) Si la población de bacterias presentes en un cultivo se incrementa a 300 bacterias en un lapso de dos horas y al transcurrir 8 horas hay 1 500 bacterias presentes, calcula el número inicial de bacterias presentes en el cultivo.

Caída libre o tiro vertical

- 11) Se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio y choca contra el suelo a una velocidad de 40 m/s . Calcula la altura del edificio.
- 12) Se deja caer un objeto desde una altura de 70 metros y llega al suelo en 8 segundos. Calcula su velocidad al momento del impacto.
- 13) Se arroja hacia arriba, desde una altura de 1 metro, una pelota de beisbol con una velocidad de 50 m/s . Calcula la altura máxima alcanzada.
- 14) Sobre la luna, la aceleración de la gravedad es un sexto de la gravedad de la tierra. Si se deja caer un objeto desde una altura de 10 metros, ¿cuál es su velocidad en el momento del impacto?

Ingreso marginal

- 15) Una cadena de hamburguesas ha determinado que su ingreso marginal está dado por:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20\,000}(60\,000 - 2x)$$

En donde R = ingreso y x = cantidad de hamburguesas vendidas. Por cada hamburguesa extra vendida ($x = 1$) el ingreso es de $R = \$1$. Calcula el ingreso R al vender 25 000 unidades.

Proporciones

- 16) El cambio de presión $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ en una tubería de agua es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de " t ", en donde " t " es el tiempo en segundos. Cuando la llave está cerrada no hay presión en la tubería y cuando se abre la llave y transcurre un segundo la presión es de 4 Pascales. Determina la presión a los 16 segundos de abrir la llave.
- 17) Supón que una lancha de motor viaja a 40 pies/segundo cuando su motor se apaga en el instante $t = 0$. A partir de ese momento, su desaceleración debido a la resistencia del agua es directamente proporcional con el cuadrado de su velocidad, con $K > 0$. Si la velocidad de la lancha después de 10 segundos es de 20 pies/segundo, ¿cuánto tiempo tarda en reducirla a 5 pies/segundo?

SOLUCIÓN

- 1) $y = 3x^2 - 3x - 2$ 2) $y = 2x^{\frac{3}{2}} - 13$ 3) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$
- 4) $f(x) = 7 - 3x$ 5) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 6) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 7$
- 7) a) $v(5) = 30 \frac{m}{s}$ b) $s = 2\,300 \text{ m}$
- 8) a) $t = 5.44s$ b) $a = -28.125 \text{ m/s}^2$ c) $v = 126.51 \text{ m/s}$
- 9) $P = 845\,000$ habitantes 10) $P = 175.44$ bacterias 11) $S = 81.63 \text{ m}$
- 12) $v = -78.4 \text{ m/s}$ 13) $S_{\text{máx.}} = 128.55 \text{ m}$ 14) $v = -5.66 \text{ m/s}$
- 15) $R = \$43\,748$ 16) $P = 16$ Pascales 17) $t = 70 \text{ s}$

Elemento de competencia 2

Aplicar el proceso de cambio de variable mediante la elección correcta de la sustitución en la solución de integrales indefinidas.

Conocimiento previo

Derivadas de funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas, hiperbólicas inversas, y la aplicación de las propiedades de los logaritmos y de las identidades trigonométricas.

Actividad No. 4	Conocimiento Previo	Individual – extra aula
Propósito: Aplicar las derivadas de funciones trascendentales.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y solución correcta a cada ejercicio propuesto.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora.		

Descripción de la actividad

Deriva y simplifica cada una de las siguientes funciones. Si es necesario, aplica las propiedades de los logaritmos y las identidades trigonométricas.

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|-------------------------|
| 1) $y = \ln x^2$ | 2) $y = e^{x^2}$ | 3) $y = \ln(\cos 4x)$ |
| 4) $y = \csc(5x)$ | 5) $y = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ | 6) $y = \sec(e^x)$ |
| 7) $y = 2\sin\theta\cos\theta$ | 8) $y = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$ | 9) $y = \tan x - x$ |
| 10) $y = \arcsin(x)$ | 11) $y = \arctan(2x)$ | 12) $y = \sinh(2x + 1)$ |
| 13) $y = \cosh^{-1}(\sin x)$ | 14) $y = 8^{x^2}$ | 15) $y = \arccos(3x)$ |

1.3 CAMBIO DE VARIABLE

El cambio de variable es un proceso por medio del cual la integral de una función compuesta es transformada en una integral más sencilla, donde se pueda aplicar directamente alguna regla básica de integración.

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du \quad \begin{array}{l} \text{Integral de una función compuesta} \\ \text{Donde } u = g(x) \text{ y } du = g'(x)dx \end{array}$$

Procedimiento para efectuar el cambio de variable.

- Identificar “ u ”.
- Derivar “ u ” generando los diferenciales.
- Despejar el diferencial resultante (dx).
- Sustituir “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificar.
- Resolver la integral resultante.
- Sustituir “ u ” en el resultado.

INTEGRALES DE LA FORMA $\int u^n du$

Integración de funciones elevadas a una potencia	
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$para\ n \neq -1$

En los siguientes ejemplos se ilustra el razonamiento empleado para hacer el cambio de variable y el uso de la regla $\int u^n du$.

EJEMPLO

Resuelve las siguientes integrales.

1) $\int (2x - 3)^2 dx$

Haciendo $u = 2x - 3$; $du = 2dx$; despejando $dx = \frac{du}{2}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (2x - 3)^2 dx = \int u^2 \left(\frac{du}{2} \right) = \frac{1}{2} \int u^2 du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} \right) + C = \frac{1}{6} u^3 + C$$

$$\int (2x - 3)^2 dx = \frac{1}{6} (2x - 3)^3 + C$$



Otra forma de resolver la integral. En este Q_R se resuelve una integral desarrollando un binomio. Esto sólo es posible cuando la potencia del binomio es entera y positiva.

2) $\int \sqrt{5 + x} dx$

Haciendo $u = 5 + x$; $du = (1)dx$; despejando $dx = du$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \sqrt{5 + x} dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (5 + x)^{\frac{3}{2}} + C$$

3) $\int (7x^3 + 4)^{\frac{1}{4}} x^2 dx$

Haciendo $u = 7x^3 + 4$; $du = 21x^2 dx$; despejando $dx = \frac{du}{21x^2}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (7x^3 + 4)^{\frac{1}{4}} x^2 dx = \int u^{\frac{1}{4}} x^2 \left(\frac{du}{21x^2} \right) = \frac{1}{21} \int u^{\frac{1}{4}} du = \frac{1}{21} \left(\frac{u^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \right) + C$$

$$\int (7x^3 + 4)^{\frac{1}{4}} x^2 dx = \frac{1}{21} \left(\frac{4}{5} \right) u^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{105} (7x^3 + 4)^{\frac{5}{4}}$$

$$4) \int \sqrt{9x-2} (5x) dx$$

Haciendo $u = 9x - 2$; $du = 9dx$; despejando $dx = \frac{du}{9}$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \sqrt{9x-2} (5x) dx = \int u^{\frac{1}{2}}(5x) \left(\frac{du}{9}\right) = \frac{5}{9} \int u^{1/2} x du$$

Despejando "x" de $u = 9x - 2$, sustituyendo "x" en la integral y simplificando:

$$\int \sqrt{9x-2} (5x) dx = \frac{5}{9} \int u^{1/2} \left(\frac{u+2}{9}\right) du = \frac{5}{81} \int u^{\frac{1}{2}}(u+2) du$$

$$\int \sqrt{9x-2} (5x) dx = \frac{5}{81} \int (u^{3/2} + 2u^{1/2}) du = \frac{5}{81} \int u^{3/2} du + \frac{10}{81} \int u^{1/2} du$$

$$\int \sqrt{9x-2} (5x) dx = \frac{5}{81} \left(\frac{u^{5/2}}{5/2}\right) + \frac{10}{81} \left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C = \frac{5}{81} \left(\frac{2}{5}\right) u^{5/2} + \frac{10}{81} \left(\frac{2}{3}\right) u^{3/2} + C$$

$$\int \sqrt{9x-2} (5x) dx = \frac{2}{81} (9x-2)^{5/2} + \frac{20}{243} (9x-2)^{3/2} + C$$

$$5) \int \frac{\ln(2x)}{2x} dx$$

Haciendo $u = \ln(2x)$; $du = \frac{dx}{x}$; despejando $dx = x du$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\ln(2x)}{2x} dx = \int \frac{u}{2x} (x du) = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2}\right) + C = \frac{1}{4} (\ln 2x)^2 + C$$

$$6) \int (e^{5x} + 7)^3 e^{5x} dx$$

Haciendo $u = e^{5x} + 7$; $du = e^{5x}(5)dx$; despejando $dx = \frac{du}{5e^{5x}}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (e^{5x} + 7)^3 e^{5x} dx = \int u^3 e^{5x} \left(\frac{du}{5e^{5x}} \right) = \frac{1}{5} \int u^3 du = \frac{1}{5} \left(\frac{u^4}{4} \right) + C = \frac{1}{20} (u)^4 + C$$

$$\int (e^{5x} + 7)^3 e^{5x} dx = \frac{1}{20} (e^{5x} + 7)^4 + C$$

7) Depreciación

La tasa de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $(t+1)$, donde V es el valor de la máquina t años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 500 000 dólares, y su valor decreció 100 000 dólares en el primer año. Estima su valor después de 4 años.

SOLUCIÓN

La ecuación diferencial que expresa la tasa de depreciación está dada por:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{K}{(t+1)^2}$$

Las condiciones iniciales son:

Para $t = 0$; $V = 500\,000$ dólares

Para $t = 1$; $V = 400\,000$ dólares

Despejando dV e integrando ambos lados de la ecuación, resulta:

$$dV = \frac{K}{(t+1)^2} dt$$

$$\int dV = \int \frac{K}{(t+1)^2} dt$$

$$V = \frac{-K}{t+1} + C$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para encontrar los valores de las constantes K y C , resulta que: $K = -200\,000$ y $C = 300\,000$

Por lo tanto, la función que representa el valor de la máquina a los t años de uso es:

$$V(t) = \frac{200\,000}{t+1} + 300\,000$$

Como se requiere estimar su valor a los 4 años de uso, entonces se evalúa $V(4)$

$$V(4) = \frac{200\,000}{4+1} + 300\,000$$

$$V(4) = 340\,000 \text{ dólares}$$

EJERCICIO 1.3

Resuelve las siguientes integrales y simplifica sus resultados:

1) $\int (8 - 2x)^2 dx$

2) $\int \sqrt[3]{x^4 + 3} (x^3) dx$

3) $\int \left(w + \frac{2}{w}\right)^2 dw$

4) $\int \sqrt{2t^3 + 4} (3t^5) dt$

5) $\int \sqrt{3x + 5} (x - 2) dx$

6) $\int (e^{7x} + 1)^3 e^{7x} dx$

7) $\int (8 + e^{-t})^2 e^{-t} dt$

8) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

9) $\int \frac{\ln(2\theta)}{2\theta} d\theta$

10) $\int \sin^4 4x \cos 4x dx$

11) $\int \cot^2 3t \csc^2 3t dt$

12) $\int \tan w \sec^2 w dw$

13) Flujo de efectivo.

La tasa de desembolso dQ/dt de una donación federal de 2 millones de dólares es proporcional al cuadrado de $(100 - t)$. El tiempo t se mide en días ($0 \leq t \leq 100$) y Q es la cantidad que queda para ser desembolsada. Determina la cantidad que queda para desembolsarse después de 50 días. Considera que todo el dinero se gastará en 100 días.

SOLUCIÓN

$$1) -\frac{1}{6} (8 - 2x)^3 + C$$

$$2) \frac{3}{16} (x^4 + 3)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$3) \frac{1}{3} w^3 + 4w - \frac{4}{w} + C$$

$$4) \frac{1}{10} (2t^3 + 4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (2t^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$5) \frac{2}{45} (3x + 5)^{\frac{5}{2}} - \frac{22}{27} (3x + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$6) \frac{1}{28} (e^{7x} + 1)^4 + C$$

$$7) -\frac{1}{3} (8 + e^{-t})^3 + C$$

$$8) \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

$$9) \frac{1}{4} (\ln 2\theta)^2 + C$$

$$10) \frac{1}{20} \sin^5 4x + C$$

$$11) -\frac{1}{9} \operatorname{ctg}^3 3t + C$$

$$12) \frac{1}{2} \tan^2 w + C$$

$$13) Q(50) = \$ 250\,000$$

1.4 INTEGRALES EN DONDE INTERVIENEN FUNCIONES TRASCENDENTALES

En este tema se abordarán integrales en donde los integrandos contienen funciones exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas, así como, integrales que dan como resultado funciones logarítmicas, trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas.

A) INTEGRALES DE LA FORMA $\int \frac{du}{u}$

Integral que da como resultado una función logarítmica natural
$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$

En donde “ u ” es una función derivable de x .

Si $u = x$, entonces: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

NOTA: Para aplicar esta fórmula es importante identificar “ u ” que puede ser todo o solo una parte del denominador.

EJEMPLO

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

$$1) \int \frac{5dx}{x} = 5 \int \frac{dx}{x} = 5\ln|x| + C$$

$$2) \int \frac{dx}{3x-1}$$

Haciendo $u = 3x - 1$; $du = 3dx$; despejando $dx = \frac{du}{3}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral, resulta:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \int \frac{1}{3x-1} dx = \int \frac{1}{u} \left(\frac{du}{3} \right) = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C$$

Aplicando la propiedad de $r \ln(p) = \ln(p^r)$, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \ln(3x-1)^{1/3} + C = \ln \sqrt[3]{3x-1} + C$$

3) $\int \frac{4x}{2-x^2} dx$

Haciendo $u = 2 - x^2$; $du = -2x dx$; despejando $dx = \frac{-du}{2x}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{4x}{2-x^2} dx = \int \frac{4x}{u} \left(\frac{-du}{2x} \right) = -2 \int \frac{du}{u} = -2 \ln|u| + C = -2 \ln|2 - x^2| + C$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt{x})}$

Haciendo $u = 4 + \sqrt{x}$; $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; despejando $dx = 2\sqrt{x} du$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt{x})} = \int \frac{2\sqrt{x} du}{\sqrt{x}u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|4 + \sqrt{x}| + C$$

Aplicando la propiedad de $r \ln(p) = \ln(p^r)$, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt{x})} = \ln(4 + \sqrt{x})^2 + C$$

5) $\int \frac{x^2+5x-3}{x+2} dx$

Haciendo la división de polinomios porque es una fracción impropia, queda:

$$\int \frac{x^2+5x-3}{x+2} dx = \int \left(x + 3 - \frac{9}{x+2} \right) dx = \int x dx + \int 3 dx - 9 \int \frac{dx}{x+2}$$

En la última integral se hace $u = x + 2$; $du = (1)dx$; despejando $du = dx$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 2} dx = \int x dx + 3 \int dx - 9 \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 9\ln|u| + C$$

$$\int \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 2} dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 9\ln|x + 2| + C$$

6) $\int \frac{\sec^2(2x)}{\tan(2x)+3} dx$

Haciendo $u = \tan(2x) + 3$; $du = \sec^2(2x)$; despejando $dx = \frac{du}{2\sec^2(2x)}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\sec^2(2x)}{\tan(2x) + 3} dx = \int \frac{\sec^2(2x)}{u} \left(\frac{du}{2\sec^2(2x)} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$\int \frac{\sec^2(2x)}{\tan(2x) + 3} dx = \frac{1}{2} \ln|\tan(2x) + 3| + C$$

Observa que en el siguiente ejemplo primero se debe hacer una operación algebraica para simplificar el integrando.

7) $\int \frac{dx}{e^{-x}+3}$

$$\int \frac{dx}{e^{-x} + 3} = \int \left(\frac{1}{\frac{1}{e^x} + 3} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\frac{1 + 3e^x}{e^x}} \right) dx = \int \left(\frac{e^x}{1 + 3e^x} \right) dx$$

Haciendo $u = 1 + 3e^x$; $du = 3e^x$; despejando $dx = \frac{du}{3e^x}$ y sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{e^{-x} + 3} = \int \frac{e^x}{u} \left(\frac{du}{3e^x} \right) = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|1 + 3e^x| + C$$

8) Transferencia de calor

Considerando que el tiempo requerido para enfriar un objeto está dado por:

$$t = \frac{10}{\ln 2} \int \frac{1}{T - 100} dT$$

En donde t es el tiempo en minutos y T es la temperatura en °Fahrenheit. Determina el tiempo (t) que se requiere para enfriar un objeto en función de la temperatura (T). Considera que cuando $t = 0$, $T = 300^\circ F$

SOLUCIÓN

Resolviendo la integral, tomando como $u = T - 100$ y $du = dT$ y sustituyendo, resulta:

$$t = \frac{10}{\ln 2} \int \frac{du}{u} = \frac{10}{\ln 2} \ln|T - 100| + C$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para encontrar el valor de la constante C , resulta que:

$$C = -76.44$$

Por lo tanto, el tiempo requerido para enfriar un objeto está dado por:

$$t(T) = \frac{10}{\ln 2} \ln|T - 100| - 76.44$$



Propiedades de los logaritmos y del valor absoluto.

En este Q_R se muestra la aplicación de las propiedades de los logaritmos y del valor absoluto en la simplificación de resultados.

EJERCICIOS 1.4 A

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

$$1) \int \frac{dx}{2x+4}$$

$$2) \int \frac{2x}{x^2-6} dx$$

$$3) \int \frac{8x+6}{2x^2+3x-2} dx$$

$$4) \int \frac{2x+3}{4x^2-9} dx$$

$$5) \int \frac{2x^2+x-9}{x-2} dx$$

$$6) \int \frac{dx}{x^{1/3}(x^{2/3}+4)}$$

$$7) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$8) \int \frac{e^{4x}}{4-e^{4x}} dx$$

$$9) \int \frac{\text{Sen}(2x)}{\text{Cos}(2x)-1} dx$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$$

$$11) \int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1} dx$$

12) Crecimiento de población.

Una población de bacterias cambia a un ritmo:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3\,000}{1 + 0.25t}$$

Donde t es el tiempo en días. La población inicial (cuando $t = 0$) era 1 000 bacterias. Escribe una ecuación que describa la población en cualquier instante t y calcular la población cuando han transcurrido 3 días.

SOLUCIÓN

$$1) \frac{1}{2} \ln|4 + 2x| + C$$

$$2) \ln|x^2 - 6| + C$$

$$3) 2 \ln|2x^2 + 3x - 2| + C$$

$$4) \frac{1}{2} \ln|2x - 3| + C$$

$$5) x^2 + 5x + \ln|x - 2| + C$$

$$6) \ln(x^{2/3} + 4)^{3/2} + C$$

$$7) \ln|\ln x| + C$$

$$8) -\frac{1}{4} \ln|4 - e^{4x}| + C$$

$$9) -\frac{1}{2} \ln|\text{Cos}(2x) - 1| + C$$

$$10) 2\sqrt{x} - 2 \ln|\sqrt{x} + 1| + C$$

$$11) -e^{-x} + \ln|e^{-x} + 1| + C$$

$$12) P(t) = 12\,000 \ln|1 + 0.25t| + 1000; P(3) = 7\,715.39 \text{ bacterias}$$

B) INTEGRALES DE LA FORMA $\int e^u du$

Integral de una función exponencial natural
$\int e^u du = e^u + C$

En donde "u" es una función derivable de x y e es la constante de Euler ($e = 2.718$)

Si $u = x$, entonces: $\int e^x dx = e^x + C$

EJEMPLO

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

1) $\int 5e^x dx = 5 \int e^x dx = 5e^x + C$

2) $\int e^{3x-1} dx$

Haciendo $u = 3x - 1$; $du = 3dx$; despejando $dx = \frac{du}{3}$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral, resulta:

$$\int e^{3x-1} dx = \int e^u \left(\frac{du}{3} \right) = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x-1} + C$$

3) $\int 12xe^{3x^2} dx$

Haciendo $u = 3x^2$; $du = 6x dx$; despejando $dx = \frac{du}{6x}$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int 12xe^{3x^2} dx = \int 12xe^u \left(\frac{du}{6x} \right) = 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{3x^2} + C$$

$$4) \int \frac{4dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$$

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = \int \frac{4e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

Haciendo $u = -\sqrt{x}$; $du = \frac{-dx}{2\sqrt{x}}$; despejando $dx = -2\sqrt{x}du$

Sustituyendo "u" y "dx" en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} = \int \frac{4e^u}{\sqrt{x}} (-2\sqrt{x}du) = -8 \int e^u du = -8e^u + C = -8e^{-\sqrt{x}} + C = \frac{-8}{e^{\sqrt{x}}} + C$$

Observa que en los siguientes ejemplos primero se efectúa la operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplica la fórmula correspondiente.

$$5) \int (e^x + e^{-x})^2 dx$$

$$\int (e^x + e^{-x})^2 = \int e^{2x} dx + 2 \int dx + \int e^{-2x} dx$$

Resolviendo cada una de las integrales resultantes, queda:

$$\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

$$6) \int \frac{e^{5x} - e^{3x} + 4e^x}{e^{2x}} dx$$

$$\int \frac{e^{5x} - e^{3x} + 4e^x}{e^{2x}} dx = \int e^{3x} dx - \int e^x dx + 4 \int e^{-x} dx$$

Resolviendo cada una de las integrales resultantes, queda:

$$\int \frac{e^{5x} - e^{3x} + 4e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{3}e^{3x} - e^x - 4e^{-x} + C = \frac{1}{3}e^{3x} - e^x - \frac{4}{e^x} + C$$

EJERCICIO 1.4 B

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

1) $\int \frac{e^x}{3} dx$

2) $\int \frac{3}{e^x} dx$

3) $\int (4x - 6)e^{(x^2-3x)} dx$

4) $\int \frac{3e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

5) $\int \cos(2x)e^{\sin(2x)} dx$

6) $\int (e^{5x})(2e^x)(4e^{2x}) dx$

7) $\int e^{-x}(e^{3x} - e^x - 1) dx$

8) $\int \frac{3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 1}{e^x} dx$

SOLUCIÓN

1) $\frac{1}{3}e^x + C$

2) $\frac{-3}{e^x} + C$

3) $2e^{(x^2-3x)} + C$

4) $6e^{\sqrt{x}} + C$

5) $\frac{1}{2}e^{\sin(2x)} + C$

6) $e^{8x} + C$

7) $\frac{1}{2}e^{2x} - x + \frac{1}{e^x} + C$

8) $\frac{3}{2}e^{2x} - 2e^x - x - \frac{1}{e^x} + C$

C) INTEGRALES DE LA FORMA $\int a^u du$

Integral de una función exponencial general
$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

En donde “u” es una función derivable de x y a es un número real positivo ($a \neq 1$).

Si $u = x$, entonces: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

EJEMPLO

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

$$1) \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$2) \int 4^x e^x dx$$

Como el exponente en ambas funciones es el mismo, se puede aplicar la propiedad de los exponentes de $(ab)^m = a^m b^m$ para reexpresar la integral como:

$$\int 4^x e^x dx = \int (4e)^x dx = \frac{(4e)^x}{\ln(4e)} + C \quad \text{en donde } a = 4e$$

$$3) \int x 2^{x^2} dx$$

Haciendo $u = x^2$; $du = 2x dx$; despejando $dx = \frac{du}{2x}$ y $a = 2$

Sustituyendo “u”, “dx” y a en la integral y simplificando, resulta:

$$\int x 2^{x^2} dx = \int x a^u \left(\frac{du}{2x} \right) = \frac{1}{2} \int a^u du = \frac{1}{2} \left(\frac{a^u}{\ln 2} \right) + C = \frac{1}{2 \ln 2} 2^{x^2} + C = \frac{2^{x^2}}{\ln 4} + C$$

$$4) \int e^{2x} (6^{e^{2x}}) dx$$

Haciendo $u = e^{2x}$; $du = e^{2x} (2 dx)$; despejando $dx = \frac{du}{2e^{2x}}$ y $a = 6$

Sustituyendo “u”, “dx” y a en la integral y simplificando, resulta:

$$\int e^{2x} (6^{e^{2x}}) dx = \int e^{2x} a^u \left(\frac{du}{2e^{2x}} \right) = \frac{1}{2} \int a^u du = \frac{1}{2} \left(\frac{6^{e^{2x}}}{\ln 6} \right) + C = \frac{6^{e^{2x}}}{\ln 36} + C$$

Observa que en el siguiente ejemplo primero se efectúa la operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplican las fórmulas correspondientes.

$$5) \int (4^x + e^x)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int (4^x + e^x)^2 dx &= \int [4^{2x} + 2(4^x)(e^x) + e^{2x}] dx \\ &= \int 4^{2x} dx + 2 \int (4e)^x dx + \int e^{2x} dx \end{aligned}$$

Haciendo $u = 2x; du = 2dx$; despejando $dx = \frac{du}{2}$ y $a = 4$ en la primera integral

Considerando que la segunda integral se resolvió en el ejemplo 2,

Haciendo $z = 2x; dz = 2dx$; despejando $dx = \frac{dz}{2}$ en la tercera integral y sustituyendo lo anterior mencionado en cada una de las integrales, resulta:

$$\int (4^x + e^x)^2 dx = \int a^u \left(\frac{du}{2} \right) + 2 \left[\frac{(4e)^x}{\ln(4e)} \right] + \int e^z \frac{dz}{2}$$

$$\int (4^x + e^x)^2 dx = \frac{1}{2} \int a^u du + \frac{2(4e)^x}{\ln(4e)} + \frac{1}{2} \int e^z dz = \frac{1}{2} \left(\frac{a^u}{\ln a} \right) + \frac{2(4e)^x}{\ln(4e)} + \frac{1}{2} e^z + C$$

$$\int (4^x + e^x)^2 dx = \frac{4^{2x}}{2 \ln 4} + \frac{2(4e)^x}{\ln(4e)} + \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

EJERCICIO 1.4 C

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

$$1) \int 6^x dx$$

$$2) \int \left(\frac{4}{e^x} \right) dx$$

$$3) \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$4) \int \frac{5^{\operatorname{Sen}^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$5) \int (3^x - 2)^2 dx$$

SOLUCIÓN

$$1) \frac{6^x}{\ln 6} + C$$

$$2) \frac{\left(\frac{4}{e} \right)^x}{\ln \left(\frac{4}{e} \right)} + C$$

$$3) \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C$$

$$4) \frac{5^{\operatorname{Sen}^{-1} x}}{\ln 5} + C$$

$$5) \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{4(3)}{\ln 3} + 4x + C$$

D) INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Todas las funciones trigonométricas y sus derivadas se pueden integrar por medio de una fórmula que implica un cambio de variable, en donde “ u ” es el argumento y es una función derivable de x , como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2. Integrales de funciones trigonométricas	
1. $\int \text{Sen } u \, du = -\text{Cos } u + C$	7. $\int \text{Sec}^2 u \, du = \text{Tan } u + C$
2. $\int \text{Cos } u \, du = \text{Sen } u + C$	8. $\int \text{Csc}^2 u \, du = -\text{Cot } u + C$
3. $\int \text{Tan } u \, du = \text{Ln} \text{Sec } u + C$ $= -\text{Ln} \text{Cos } u + C$	9. $\int \text{Sec } u \text{ Tan } u \, du = \text{Sec } u + C$
4. $\int \text{Cot } u \, du = -\text{Ln} \text{Csc } u + C$ $= \text{Ln} \text{Sen } u + C$	10. $\int \text{Csc } u \text{ Cot } u \, du = -\text{Csc } u + C$
5. $\int \text{Sec } u \, du = \text{Ln} \text{Sec } u + \text{Tan } u + C$	
6. $\int \text{Csc } u \, du = \text{Ln} \text{Csc } u - \text{Cot } u + C$	

EJEMPLO

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

1) $\int \text{Sen}(5x)dx$

Haciendo $u = 5x$; $du = 5dx$; despejando $dx = \frac{du}{5}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \text{Sen}(5x)dx = \int \text{Sen } u \left(\frac{du}{5}\right) = \frac{1}{5} \int \text{Sen } u \, du = \frac{1}{5}(-\text{Cos } u) + C = \frac{-1}{5} \text{Cos}(5x) + C$$

$$2) \int 3x \tan(1 - 2x^2) dx$$

Haciendo $u = 1 - 2x^2$; $du = -4x dx$; despejando $dx = \frac{-du}{4x}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int 3x \tan(1 - 2x^2) dx = \int 3x \tan u \left(\frac{-du}{4x} \right) = \frac{-3}{4} \int \tan u du$$

$$\int 3x \tan(1 - 2x^2) dx = \frac{-3}{4} (-\ln|\cos u|) + C = \frac{3}{4} \ln|\cos(1 - 2x^2)| + C, \text{ o bien}$$

$$\int 3x \tan(1 - 2x^2) dx = \frac{-3}{4} (\ln|\sec u|) + C = \frac{-3}{4} \ln|\sec(1 - 2x^2)| + C$$

$$3) \int \cos(2x) \cos(\sin 2x) dx$$

Haciendo $u = \sin 2x$; $du = \cos 2x(2dx)$; despejando $dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \cos(2x) \cos(\sin 2x) dx = \int \cos(2x) \cos u \left(\frac{du}{2\cos 2x} \right) = \frac{1}{2} \int \cos u du$$

$$\int \cos(2x) \cos(\sin 2x) dx = \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin(\sin 2x) + C$$

$$4) \int (\sec 3x - \csc^2 4x) dx$$

$$\int (\sec 3x - \csc^2 4x) dx = \int \sec 3x dx - \int \csc^2 4x dx$$

Haciendo $u = 3x$; $du = 3dx$; despejando $dx = \frac{du}{3}$ en la primera integral y

Haciendo $z = 4x$; $dz = 4dx$; despejando $dx = \frac{dz}{4}$ en la segunda integral

Sustituyendo “u” y “dx” correspondiente en cada integral y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned}\int (\sec 3x - \csc^2 4x) dx &= \int \sec u \left(\frac{du}{3} \right) - \int \csc^2 z \left(\frac{dz}{4} \right) \\ \int (\sec 3x - \csc^2 4x) dx &= \frac{1}{3} \int \sec u \, du - \frac{1}{4} \int \csc^2 z \, dz \\ \int (\sec 3x - \csc^2 4x) dx &= \frac{1}{3} \ln |\sec u + \tan u| - \frac{1}{4} (-\cot z) + C \\ \int (\sec 3x - \csc^2 4x) dx &= \frac{1}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{4} \cot(4x) + C\end{aligned}$$

Observa que en los siguientes ejemplos primero es necesario aplicar alguna o algunas identidades trigonométricas, o bien, efectuar una operación algebraica para simplificar el integrando y después se aplican las fórmulas correspondientes.

5) $\int \frac{dx}{\sin 5x}$

$$\int \frac{dx}{\sin 5x} = \int \left(\frac{1}{\sin 5x} \right) dx = \int \csc 5x \, dx \quad \text{Aplicando una identidad}$$

Haciendo $u = 5x$; $du = 5dx$; despejando $dx = \frac{du}{5}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin 5x} &= \int \csc u \left(\frac{du}{5} \right) = \frac{1}{5} \int \csc u \, du = \frac{1}{5} \ln |\csc u - \cot u| + C \\ \int \frac{dx}{\sin 5x} &= \frac{1}{5} \ln |\csc 5x - \cot 5x| + C\end{aligned}$$

6) $\int \frac{3^x dx}{\cos^2(3^x)}$

$$\int \frac{3^x dx}{\cos^2(3^x)} = \int 3^x \left(\frac{1}{\cos 3^x} \right)^2 dx = \int 3^x \sec^2 3^x dx \quad \text{Aplicando una identidad}$$

Haciendo $u = 3^x$; $du = 3^x \ln 3 \, dx$; despejando $dx = \frac{du}{3^x \ln 3}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{3^x dx}{\cos^2(3^x)} = \int 3^x \sec^2 u \left(\frac{du}{3^x \ln 3} \right) = \frac{1}{\ln 3} \int \sec^2 u \, du = \frac{1}{\ln 3} \tan u + C$$

$$\int \frac{3^x dx}{\cos^2(3^x)} = \frac{1}{\ln 3} \tan 3^x + C$$

7) $\int (1 + \cot^2 6x) dx$

$$\int (1 + \cot^2 6x) dx = \int \csc^2 6x \, dx \quad \text{Aplicando una identidad}$$

Haciendo $u = 6x$; $du = 6 \, dx$; despejando $dx = \frac{du}{6}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (1 + \cot^2 6x) dx = \int \csc^2 u \left(\frac{du}{6} \right) = \frac{1}{6} \int \csc^2 u \, du = \frac{1}{6} (-\cot u) + C$$

$$\int (1 + \cot^2 6x) dx = \frac{-1}{6} \cot 6x + C$$

8) $\int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\cos^3 x} \, dx$

$$\int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^3 x} \, dx \quad \text{Aplicando una identidad}$$

$$\int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \sec x \, dx \quad \text{Simplificando y aplicando una identidad}$$

$$\int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\cos^3 x} \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$9) \int \frac{(\text{Sen } x - \text{Cos } x)}{\text{Sen } x} dx$$

$$\int \frac{(\text{Sen } x - \text{Cos } x)}{\text{Sen } x} dx = \int \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen } x} dx - \int \frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x} dx \quad \text{Haciendo operación algebraica}$$

$$\int \frac{(\text{Sen } x - \text{Cos } x)}{\text{Sen } x} dx = \int dx - \int \text{Cot } x dx \quad \text{Simplificando en la primera integral y aplicando una identidad en la segunda integral}$$

$$\int \frac{(\text{Sen } x - \text{Cos } x)}{\text{Sen } x} dx = x + \ln|\text{Sen } x| + C$$

O bien:

$$\int \frac{(\text{Sen } x - \text{Cos } x)}{\text{Sen } x} dx = x - \ln|\text{Csc } x| + C$$

$$10) \int \frac{(\text{Sen}^2 x - 4)}{(\text{Sen } x + 2)} dx$$

Factorizando el numerador y simplificando la fracción, resulta:

$$\int \frac{(\text{Sen}^2 x - 4)}{(\text{Sen } x + 2)} dx = \int \frac{(\text{Sen } x + 2)(\text{Sen } x - 2)}{(\text{Sen } x + 2)} dx = \int (\text{Sen } x - 2) dx$$

$$\int \frac{(\text{Sen}^2 x - 4)}{(\text{Sen } x + 2)} dx = \int \text{Sen } x dx - 2 \int dx$$

$$\int \frac{(\text{Sen}^2 x - 4)}{(\text{Sen } x + 2)} dx = -\text{Cos } x - 2x + C$$



Resolver una integral por diferentes procedimientos.

En este Q_R se resuelve, por tres formas diferentes, una integral que contiene funciones trigonométricas y se comprueba que todos los resultados son iguales, mediante el uso de identidades trigonométricas.

EJERCICIO 1.4 D

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

1) $\int \sec 2x \tan 2x \, dx$

2) $\int 6x \cos 3x^2 \, dx$

3) $\int e^{3x} \csc^2 e^{3x} \, dx$

4) $\int (\tan 2x - \sec 5x) \, dx$

5) $\int \frac{5 \, dx}{\cos 3x}$

6) $\int \left(\frac{\sec^2 x + \cos^2 x}{\csc x} \right) \, dx$

7) $\int (\sec x + \cos x)^2 \, dx$

8) $\int \frac{\sec x}{\tan x} \, dx$

9) $\int \frac{\tan^3 x}{\sec^2 x - 1} \, dx$

10) $\int \frac{3^x}{\tan 3^x} \, dx$

SOLUCIÓN

1) $\frac{1}{2} \sec 2x + C$

2) $\sin 3x^2 + C$

3) $-\frac{1}{3} \cot e^{3x} + C$

4) $\frac{1}{2} \ln|\sec 2x| + \frac{1}{5} \cos 5x + C$

5) $\frac{5}{3} \ln|\sec 3x + \tan 3x| + C$

6) $-\cos x + C$

7) $x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

8) $\ln|\csc x - \cot x| + C$

9) $\ln|\sec x| + C$

10) $\frac{1}{\ln 3} \ln|\sin 3^x| + C$

E) INTEGRALES DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Por definición, las funciones hiperbólicas se pueden expresar como:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Aunque es más común expresarlas como funciones hiperbólicas, sólo para demostraciones u otros fines se usa la definición de las mismas.

La siguiente tabla muestra la integración de este tipo de funciones.

Tabla 3. Integrales de funciones hiperbólicas	
1. $\int \sinh u \, du = \cosh u + C$	5. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$
2. $\int \cosh u \, du = \sinh u + C$	6. $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$
3. $\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$	7. $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$
4. $\int \coth u \, du = \ln \sinh u + C$	8. $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$
En donde “u” es una función derivable de “x”.	

EJEMPLO

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

1) $\int \operatorname{sech} 2x \tanh 2x \, dx$

Haciendo $u = 2x$; $du = 2dx$; despejando $dx = \frac{du}{2}$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \operatorname{Sech} 2x \operatorname{Tanh} 2x \, dx = \int \operatorname{Sech} u \operatorname{Tanh} u \left(\frac{du}{2} \right) = \frac{1}{2} \int \operatorname{Sech} u \operatorname{Tanh} u \, du$$

$$\int \operatorname{Sech} 2x \operatorname{Tanh} 2x \, dx = \frac{1}{2} (-\operatorname{Sech} u) + C = -\frac{1}{2} \operatorname{Sech} 2x + C$$

2) $\int \frac{\operatorname{Senh}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

Haciendo $u = \sqrt[3]{x}$; $du = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$; despejando $dx = 3\sqrt[3]{x^2} du$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\operatorname{Senh}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx = \int \frac{\operatorname{Senh} u}{\sqrt[3]{x^2}} (3\sqrt[3]{x^2} du) = 3 \int \operatorname{Senh} u \, du = 3\operatorname{Cosh} u + C$$

$$\int \frac{\operatorname{Senh}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx = 3 \operatorname{Cosh}(\sqrt[3]{x}) + C$$

3) $\int \frac{\operatorname{Cosh}(\ln x)}{x} \, dx$

Haciendo $u = \ln x$; $du = \frac{dx}{x}$; despejando $dx = x \, du$

Sustituyendo “u” y “dx” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\operatorname{Cosh}(\ln x)}{x} \, dx = \int \frac{\operatorname{Cosh} u}{x} (x \, du) = \int \operatorname{Cosh} u \, du = \operatorname{Senh} u + C$$

$$\int \frac{\operatorname{Cosh}(\ln x)}{x} \, dx = \operatorname{Senh}(\ln x) + C$$

4) $\int (4x + 4) \operatorname{Tanh} (x^2 + 2x - 1) dx$

Haciendo $u = x^2 + 2x - 1$; $du = (2x + 2)dx$; despejando $dx = \frac{du}{2x+2}$

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int (4x + 4) \tanh (x^2 + 2x - 1) dx = \int (4x + 4) \tanh u \left(\frac{du}{2x + 2} \right) = 2 \int \tanh u \, du$$

$$\int (4x + 4) \tanh (x^2 + 2x - 1) dx = 2 \ln |\cosh(x^2 + 2x - 1)| + C$$

5) $\int (\cosh^2 x + \sinh^2 x) dx$

$$\int (\cosh^2 x + \sinh^2 x) dx = \int \cosh 2x \, dx \quad \text{Aplicando una identidad hiperbólica}$$

Haciendo $u = 2x$; $du = 2 \, dx$; despejando $dx = \frac{du}{2}$ de la integral resultante

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral resultante y simplificando, resulta:

$$\int (\cosh^2 x + \sinh^2 x) dx = \int \cosh u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cosh u \, du = \frac{1}{2} \sinh u + C$$

$$\int (\cosh^2 x + \sinh^2 x) dx = \frac{1}{2} \sinh 2x + C$$

6) $\int \frac{dx}{\operatorname{csch} 3x}$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{csch} 3x} = \int \frac{1}{\operatorname{csch} 3x} \, dx = \int \sinh 3x \, dx \quad \text{Aplicando una identidad hiperbólica}$$

Haciendo $u = 3x$; $du = 3 \, dx$; despejando $dx = \frac{du}{3}$ de la integral

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral resultante y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{csch} 3x} = \int \sinh u \left(\frac{du}{3} \right) = \frac{1}{3} \cosh u + C = \frac{1}{3} \cosh 3x + C$$



Demostración de integrales de funciones hiperbólicas. En este Q_R se aplica la definición de funciones hiperbólicas en un ejemplo de integración y se comprueba el resultado aplicando dichas definiciones.

EJERCICIO 1.4 E

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

$$1) \int \frac{\cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$2) \int e^x \operatorname{csch} e^x \coth e^x dx$$

$$3) \int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sech}^2(\cos 3x) dx$$

$$4) \int \coth 4x dx$$

$$5) \int \frac{4dx}{\operatorname{csch} 2x}$$

$$6) \int (\coth^2 x - 1) dx$$

SOLUCIÓN

$$1) 2\operatorname{senh} \sqrt{x} + C$$

$$2) -\operatorname{csch} e^x + C$$

$$3) \frac{-1}{3} \operatorname{Tanh} (\cos 3x) + C$$

$$4) \frac{1}{4} \ln |\operatorname{senh} 4x| + C$$

$$5) 2\cosh 2x + C$$

$$6) -\coth x + C$$

F) INTEGRALES QUE DAN COMO RESULTADO FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS E HIPERBÓLICAS INVERSAS

A partir de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas y de las funciones hiperbólicas inversas, se obtienen las siguientes fórmulas de integración.

Si “ u ” es una función derivable de “ x ” y $a > 0$ una constante.

Tabla 4	
Funciones trigonométricas inversas	Funciones hiperbólicas inversas
1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arc Sen} \frac{u}{a} + C$	1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \text{Arc Senh} \frac{u}{a} + C$
2. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \text{Arc Tan} \frac{u}{a} + C$	2. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \text{Arc Cosh} \frac{u}{a} + C$
3. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \text{Arc Sec} \frac{u}{a} + C$	3. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a} \text{Arc Tanh} \frac{u}{a} + C$
	4. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a} \text{Arc Sech} \frac{u}{a} + C$
	5. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a} \text{Arc Csch} \frac{u}{a} + C$

NOTA: $\text{Arc Sen } x$ es equivalente a $\text{Sen}^{-1}x$

EJEMPLO

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Haciendo $u^2 = x^2$; $u = x$; $du = dx$; $a^2 = 9$; $a = 3$ y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arc Sen} \left(\frac{u}{a} \right) + C = \text{Arc Sen} \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

$$2) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}}$$

Haciendo $u^2 = e^{2x}$; $u = e^x$; $du = e^x dx$; despejando $dx = \frac{du}{e^x}$; $a^2 = 4$; $a = 2$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}} = \int \frac{e^x}{\sqrt{u^2 - a^2}} \left(\frac{du}{e^x} \right) = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \text{Cosh}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}} = \text{Cosh}^{-1} \left(\frac{e^x}{2} \right) + C$$

$$3) \int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}}$$

Haciendo $u^2 = 4x^2$; $u = 2x$; $du = 2dx$; despejando $dx = \frac{du}{2}$; $a^2 = 9$; $a = 3$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{4}{x\sqrt{a^2 - u^2}} \left(\frac{du}{2} \right) = 4 \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = 4 \left(\frac{-1}{a} \right) \text{Arc Sech} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{4dx}{x\sqrt{9-4x^2}} = \frac{-4}{3} \text{Arc Sech} \left(\frac{2x}{3} \right) + C$$

$$4) \int \frac{dx}{9x^2 + 1}$$

Haciendo $u^2 = 9x^2$; $u = 3x$; $du = 3dx$; despejando $dx = \frac{du}{3}$; $a^2 = 1$; $a = 1$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 1} = \int \frac{1}{u^2 + a^2} \left(\frac{du}{3} \right) = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} \right) \text{Tan}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 1} = \frac{1}{3} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{3x}{1} \right) + C = \frac{1}{3} \text{Tan}^{-1}(3x) + C$$

$$5) \int \frac{dx}{x\sqrt{4+x}}$$

Haciendo $u^2 = x$; $u = \sqrt{x}$; $du =$; despejando $dx = 2\sqrt{x}du$; $a^2 = 4$; $a = 2$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x}} = \int \frac{2\sqrt{x}du}{x\sqrt{a^2+u^2}} = 2 \int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = 2 \left(\frac{-1}{a} \right) \text{Arc Csch} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x}} = 2 \left(\frac{-1}{2} \right) \text{Arc Csch} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) + C = -\text{Arc Csch} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) + C$$

$$6) \int \frac{\sec^2 3x dx}{\sqrt{16+\tan^2 3x}}$$

Haciendo $u^2 = \tan^2 3x$; $u = \tan 3x$; $du = \sec^2 3x(3dx)$;

Despejando $dx = \frac{du}{3\sec^2 3x}$; $a^2 = 16$; $a = 4$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral y simplificando, resulta:

$$\int \frac{\sec^2 3x dx}{\sqrt{16+\tan^2 3x}} = \int \frac{\sec^2 3x}{\sqrt{a^2+u^2}} \left(\frac{du}{3\sec^2 3x} \right) = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{1}{3} \text{Senh}^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{\sec^2 3x dx}{\sqrt{16+\tan^2 3x}} = \frac{1}{3} \text{Senh}^{-1} \left(\frac{\tan 3x}{4} \right) + C$$

Observa en los siguientes ejemplos qué se puede hacer cuando aparece un trinomio general de 2º grado.



Método para completar el trinomio cuadrado perfecto.

En este QR se muestra el método para completar un trinomio cuadrado perfecto, de manera que un trinomio general de segundo grado se pueda expresar como la suma y/o resta de dos cuadrados.

$$7) \int \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

Reexpresando la integral, queda:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1}$$

Haciendo $u^2 = (x+3)^2$; $u = (x+3)$; $du = dx$; $a^2 = 1$; $a = 1$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral resultante y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{Arc Tan}\left(\frac{u}{a}\right) + C = \text{Arc Tan}(x+3) + C$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

Reexpresando la integral, queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$$

Haciendo $u^2 = (x+1)^2$; $u = (x+1)$; $du = dx$; $a^2 = 4$; $a = 2$

Sustituyendo “u”, “dx” y “a” en la integral resultante y simplificando, queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$



Funciones equivalentes a las funciones hiperbólicas inversas. En este Q_R se demuestra la forma equivalente de algunas funciones hiperbólicas inversas utilizando logaritmos naturales, que es la función inversa de la exponencial natural. Las integrales que dan como resultado funciones hiperbólicas inversas se pueden expresar en logaritmos naturales, como se muestra en el formulario.

EJERCICIO 1.4 F

Resuelve cada una de las siguientes integrales.

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+9}}$$

$$4) \int \frac{x dx}{x^4+9}$$

$$5) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+4}}$$

$$6) \int \frac{\text{Sen } 2x dx}{\text{Cos } 2x \sqrt{9-\text{Cos}^2 2x}}$$

$$7) \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x}-16}}$$

$$8) \int \frac{3dx}{x\sqrt{9-x}}$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$$

$$10) \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

SOLUCIÓN

$$1) \text{Arc Sec } (x) + C$$

$$2) \frac{1}{4} \text{Sen}^{-1} \left(\frac{4x}{3} \right) + C$$

$$3) \frac{-1}{3} \text{Arc Csch} \left(\frac{e^x}{3} \right) + C$$

$$4) \frac{1}{6} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{x^2}{3} \right) + C$$

$$5) \text{Arc Senh} \left(\frac{\ln x}{2} \right) + C$$

$$6) \frac{1}{6} \text{Sech}^{-1} \left(\frac{\text{Cos } 2x}{3} \right) + C$$

$$7) \frac{1}{2} \text{Arc Cosh} \left(\frac{e^{2x}}{4} \right) + C$$

$$8) -2 \text{Sech}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{3} \right) + C$$

$$9) \text{Arc Senh} (x + 3) + C$$

$$10) -\text{Sech}^{-1} (x - 2) + C$$

Actividad No. 5	Desarrollo	En equipo- extra aula
Propósito: Identificar la fórmula de la integral que involucra el cambio de variable y funciones trascendentales.		
Criterio de evaluación: Se evaluará al equipo que exponga la respuesta correcta.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora clase.		

Descripción de la actividad

Determina la fórmula que corresponde para resolver cada integral propuesta e identifica “u” en cada una. (No resuelvas la integral).

- | | | | |
|---|---|--|---------------------------------|
| 1) $\int (2x - 3)^3 dx$ | 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$ | 3) $\int \frac{\text{Sen}(5x)}{4-\text{Cos}(5x)} dx$ | 4) $\int \frac{3}{e^{3x}} dx$ |
| 5) $\int \text{Csch } 3x \text{Coth } 3x dx$ | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+25x^2}}$ | 7) $\int \frac{2^x}{e^x} dx$ | 8) $\int \frac{x}{x^2+4} dx$ |
| 9) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ | 10) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ | 11) $\int 4e^x dx$ | 12) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$ |
| 13) $\int e^x \text{Coth}(e^x) dx$ | 14) $\int 2 \text{Sen} x \text{Cos} x dx$ | 15) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$ | |
| 16) $\int e^{(3x-2)} dx$ | 17) $\int \text{Sen}^2 x \text{Cos} x dx$ | 18) $\int \frac{\text{Csc}^2 x}{2 \text{Cot} x} dx$ | |
| 19) $\int \text{Sec} \pi x \text{Tan} \pi x dx$ | 20) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}$ | | |

Actividad No. 6	Desarrollo	En equipo- en el aula
Propósito: Seleccionar el método de integración.		
Criterio de evaluación: Rapidez de respuesta de los equipos, argumentación por equipo y contenido del reporte por equipo.		
Tiempo estimado para la actividad: 50 minutos.		

Descripción de la actividad

- 1) Forma equipos de 4 estudiantes en una sesión de clase.
 - 2) Se entrega la actividad por equipo estipulando un tiempo de 20 minutos para resolver el problema I de la actividad propuesta.
 - 3) En los siguientes 5 minutos, entabla una discusión para comparar las soluciones y estar de acuerdo en las correctas.
 - 4) Se continúa con la actividad, dando 10 minutos para resolver el problema II de la actividad propuesta.
 - 5) En lo siguientes 5 minutos, mediante una lluvia de ideas propicia que el estudiante llegue a conclusiones, distinguiendo las estrategias matemáticas con las que puede contar.
 - 6) Retroalimentación.
- I. Evalúa cada una de las siguientes integrales.

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$

2) $\int x\sqrt{x-1} dx$

3) $\int \frac{x}{\operatorname{sen} x^2} dx$

Después de realizar los procedimientos de cada integral, selecciona el inciso que corresponde a la solución.

SOLUCIÓN DE LA 1

a) $2\sqrt{1-x^3} + C$

b) $\frac{-2}{3} \sqrt{1-x^3} + C$

c) $-\sqrt{1-x^3} + C$

SOLUCIÓN DE LA 2

a) $(x-1)^{\frac{5}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

b) $\frac{1}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

c) $\frac{2}{15} (x-1)^{\frac{3}{2}} (3x+2) + C$

SOLUCIÓN DE LA 3

a) $\frac{1}{2} \ln |Csc x^2 - Cot x^2| + C$

b) $\ln |Csc x^2 - Cot x^2| + C$

c) $\ln |Csc u - Cot u| + C$

II. Analiza los procedimientos y expresa qué los distingue.

Elemento de competencia 3

Relacionar la integral definida con la suma de Riemann para su interpretación geométrica.

Conocimiento previo

Teoremas sobre límites al infinito.

Actividad No. 7	Conocimiento previo	Individual - extra aula
Propósito: Evaluar límites al infinito.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y soluciones correctas.		
Tiempo estimado para la actividad: 30 minutos.		

Descripción de la actividad

Calcula el límite de cada función dada, si es que existe.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 4 \right) \qquad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - 5 \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 5x - 3}{4 - 2x^2} \right) \qquad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(3x+1)(2x-3)}{x^2} \right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x + 1} \right)$$

1.5 NOTACIÓN SIGMA

La notación sigma se utiliza para reducir la escritura de una suma de números.

Se denota por:

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

En donde:

Σ es el símbolo de la sumatoria.

i es el índice de la sumatoria y toma valores enteros consecutivos, desde m hasta n .

m y n son constantes llamadas límites de la sumatoria.

$f(i)$ es la función que genera los números a sumar.

NOTA: Es común que otras letras se empleen para representar el índice de la sumatoria; por ejemplo, las letras j , k , m , n , etc.

Cuando la sumatoria está definida para la suma de una gran cantidad de números, se utilizan los siguientes Teoremas de Sumatorias para simplificar la operación de la suma.

Tabla 4. Teoremas de Sumatorias

Sean m y n enteros positivos, c = constante

$$1. \sum_{i=1}^n c f(i) = c \sum_{i=1}^n f(i)$$

$$2. \sum_{i=1}^n [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^n f(i) \pm \sum_{i=1}^n g(i)$$

$$3. \sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{i=1}^m f(i) + \sum_{i=m+1}^n f(i) \quad m < n$$

$$4. \sum_{i=1}^n c = nc$$

$$5. \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$6. \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$7. \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

EJEMPLO 1

Expresa en notación sigma las siguientes sumas.

a) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} \dots \dots \dots \sqrt{20}$

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} \dots \dots \dots \sqrt{20} = \sum_{i=1}^{20} \sqrt{i}$$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots \dots \dots \frac{1}{200}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots \dots \dots \frac{1}{200} = \sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{2j} \right)$$

c) Suma de los primeros 50 números impares consecutivos.

En este ejemplo primero se debe conocer la expresión que genere a los números impares; en este caso partimos de la expresión $(2k + 1)$

$$1 + 3 + 5 + 7 \dots \dots \dots 99 = \sum_{k=0}^{49} (2k + 1)$$

También la expresión $(2k-1)$ genera los números impares, pero al considerarla se deben cambiar los límites de la sumatoria, o sea:

$$1 + 3 + 5 + 7 \dots \dots \dots 99 = \sum_{k=1}^{50} (2k - 1)$$

EJEMPLO 2

Calcula cada una de las siguientes sumas. Si es necesario utiliza los teoremas de las sumatorias.

a) $\sum_{i=-1}^6 (3i + 2)$

Generando los números que se van a sumar, sustituyendo los valores de $i = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ en $(3i + 2)$, resulta:

$$\sum_{i=-1}^6 (3i + 2) = -1 + 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = 76$$

b) $\sum_{n=0}^5 \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right)$

Generando los números que se van a sumar, sustituyendo los valores de $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en $\cos \left(n \frac{\pi}{2} \right)$, resulta:

$$\sum_{n=0}^5 \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \cos(0) + \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + \cos(\pi) + \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + \cos(2\pi) + \cos \left(\frac{5\pi}{2} \right)$$

$$\sum_{n=0}^5 \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 = 1$$

c) $\sum_{i=1}^{30} (i - 3)^2$

Desarrollando el binomio, queda:

$$\sum_{i=1}^{30} (i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{30} (i^2 - 6i + 9)$$

Aplicando el Teorema 2 de las sumatorias:

$$\sum_{i=1}^{30} (i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2 - \sum_{i=1}^{30} 6i + \sum_{i=1}^{30} 9$$

Aplicando el Teorema 1 en la segunda sumatoria y el Teorema 4, con $n = 30$ en la tercera sumatoria, queda:

$$\sum_{i=1}^{30} (i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2 - 6 \sum_{i=1}^{30} i + (30)(9)$$

Aplicando el Teorema 6 en la primera sumatoria y el Teorema 5 en la segunda sumatoria, ambos con $n = 30$, resulta:

$$\sum_{i=1}^{30} (i - 3)^2 = \frac{30(31)(61)}{6} - 6 \left(\frac{(30)(31)}{2} \right) + 270 = 9\,455 - 2\,790 + 270$$

$$\sum_{i=1}^{30} (i - 3)^2 = 6\,935$$

EJERCICIO 1.5

I. Expresa en notación sigma las siguientes sumas.

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \cdots \cdots \frac{1}{15}$

2) $-1 + 2 + 5 + 8 + \cdots \cdots \cdots 23$

3) Suma de los primeros 50 números pares consecutivos.

II. Calcula las sumas indicadas. Si es necesario, utiliza los Teoremas de la Sumatoria.

4) $\sum_{k=1}^5 k$

5) $\sum_{n=1}^{20} 2$

6) $\sum_{j=1}^{25} 5j$

7) $\sum_{i=1}^{10} (3i - 4)$

8) $\sum_{i=1}^{100} \left(\frac{i+3}{n^2}\right)$

9) $\sum_{i=1}^{12} (i^2 - 1)$

10) $\sum_{i=1}^{10} (i - 1)^2$

11) $\sum_{i=1}^4 (i + 1)^3$

12) $\sum_{i=3}^{40} (3i + 2)$

SOLUCIÓN

1) $\sum_{i=1}^{15} \left(\frac{1}{i}\right)$

2) $\sum_{i=1}^9 (3i - 4)$

3) $\sum_{i=1}^{50} 2i$

4) 15

5) 40

6) 1 625

7) 125

8) $\frac{5350}{n^2}$

9) 638

10) 285

11) 224

12) 2 527

Actividad No. 8	Desarrollo	En equipo – en el aula
Propósito: Aplicar la notación sigma y sus teoremas en el cálculo de sumas.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos correctos.		
Tiempo estimado para la actividad: 10 minutos.		

Descripción de la actividad

1. En equipos de 3 estudiantes como máximo, se reflexionará sobre el procedimiento requerido para resolver las sumatorias propuestas.

a) $\sum_{i=-3}^{50} (2i + 1)$

b) $\sum_{i=4}^{60} (2i - 3)^2$

c) $\sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{k}\right)$

2) Se comentarán las conclusiones en el aula.

3) Retroalimentación.

1.6 INTEGRAL DEFINIDA

Definición

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. La integral definida de f de a a b se representa por: $\int_a^b f(x)dx$ y se define:

$$1. \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x \quad \text{Para una partición particular}$$

$$\text{En donde: } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad c_i = a + i\Delta x$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad \text{Para una partición cualquiera}$$

En donde a se llama límite inferior, b se llama límite superior, $f(x)$ se llama integrando.

Interpretación geométrica

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$ entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ se interpreta como el área de la región acotada por la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a, x = b$.

Nuestro objetivo es evaluar una integral definida utilizando la primera definición y ver su interpretación geométrica.

EJEMPLO 1

Evalúa la integral definida dada utilizando la definición 1 y muestra qué es lo que representa en forma geométrica.

$$\int_1^3 (2x + 1)dx$$

Se toma una partición regular del intervalo $[1, 3]$ con n subintervalos de magnitud

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \quad c_i = 1 + i * \Delta x.$$

Ahora se evalúa $f(c_i) = f(1 + i \cdot \Delta x) = 2(1 + i\Delta x) + 1$

Ahora efectuamos la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^n [2(1 + i\Delta x) + 1]\Delta x = \sum_{i=1}^n [3\Delta x + 2i(\Delta x)^2]$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^n 3\Delta x + 2(\Delta x)^2 \sum_{i=1}^n i = (3\Delta x)n + 2(\Delta x)^2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]$$

Se sustituye el valor de $\Delta x = \frac{2}{n}$; resulta:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x = 3\left(\frac{2}{n}\right)n + 2\left(\frac{2}{n}\right)^2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = 6 + 2\left(\frac{4}{n^2}\right) \left[\frac{n^2+n}{2} \right] = 6 + 4 + \frac{4}{n} = 10 + \frac{4}{n}$$

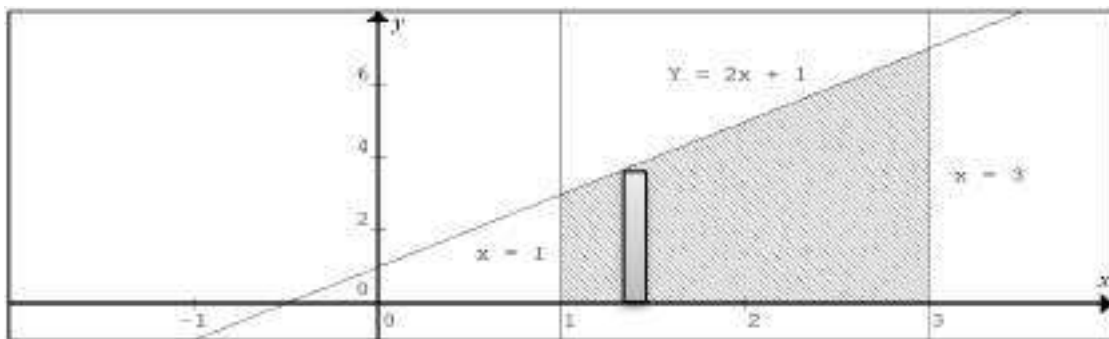
Luego se aplica el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\int_1^3 (2x + 1)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[10 + \frac{4}{n} \right] = 10 + 0 = 10, \text{ por lo tanto:}$$

$$\int_1^3 (2x + 1)dx = 10$$

Para ver la interpretación geométrica, se traza la gráfica del integrando:

$$f(x) = 2x + 1$$



En la figura se muestra la región. Para calcular su área se debe separar en dos regiones: R_1 y R_2 ; la primera es un triángulo rectángulo y la segunda es un rectángulo, por lo tanto:

$$\text{Área de } R_1 = \frac{(2)(4)}{2} = 4$$

$$\text{Área de } R_2 = (2)(3) = 6$$

$$\text{Área total} = \text{área de } R_1 + \text{área de } R_2 = 4 + 6$$

$$\text{Área total} = 10$$

Se concluye, como se dijo en la teoría correspondiente, que si $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces:

$\int_a^b f(x)dx$ = área de la región acotada por el eje X , las rectas $x = a$; $x = b$ y por la gráfica de $y = f(x)$

EJEMPLO 2

Evalúa la integral definida dada utilizando la definición 1 y muestra qué es lo que representa en forma geométrica:

$$\int_0^1 (2x^2 - 1)dx$$

Se toma una partición regular del intervalo $[0,1]$ con n subintervalos de magnitud:

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, \quad c_i = 0 + i * \Delta x.$$

$$\text{Ahora se evalúa } f(c_i) = f(i * \Delta x) = 2(i\Delta x)^2 - 1$$

Ahora efectuamos la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n [2(i\Delta x)^2 - 1] \Delta x = \sum_{i=1}^n [2i^2(\Delta x)^3 - \Delta x]$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = 2(\Delta x)^3 \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n [\Delta x]$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = 2(\Delta x)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n [\Delta x], \text{ se sustituye el valor de } \Delta x = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} (2n^3 + 3n^2 + n) - n \left(\frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}$$

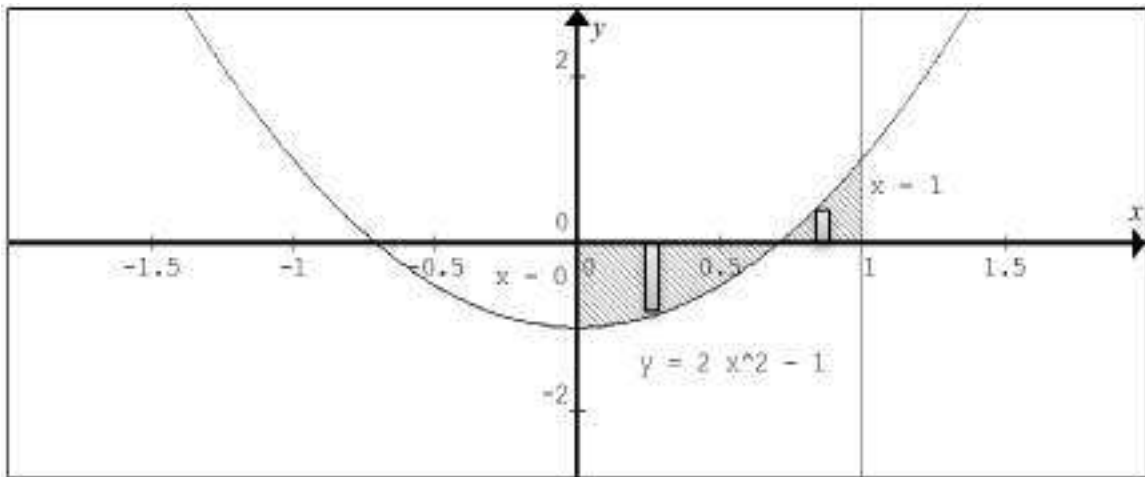
Luego se aplica el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 (2x^2 - 1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} \right] = -\frac{1}{3}, \text{ por lo tanto:}$$

$$\int_0^1 (2x^2 - 1) dx = -\frac{1}{3}$$

Para ver la interpretación geométrica, se traza la gráfica del integrando:

$$f(x) = 2x^2 - 1$$



Si observamos las dos regiones sombreadas, notaremos que una está bajo el eje X , por lo tanto el área para esa región tiene signo negativo y en la región que está por encima del eje X el área tiene signo positivo. Finalmente se sumaron esas áreas con su respectivo signo, obteniendo un resultado negativo porque el área que está bajo el eje X es mayor que la que está por encima de él.



Integral definida que da cero. En este Q_R se muestra un ejemplo de una integral definida que da cero como resultado. Observa su interpretación geométrica.

EJERCICIO 1.6

Evalúa cada una de las integrales definidas aplicando la definición, utilizando una partición regular y observar su interpretación geométrica.

1. $\int_{-1}^1 (2x + 3)dx$

2. $\int_0^2 x^2 dx$

3. $\int_0^2 (x^2 - 1)dx$

4. $\int_1^2 (x - 2)dx$

SOLUCIÓN

1. 6

2. $8/3$

3. $2/3$

4. $-1/2$

Elemento de competencia 4

Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo mediante su relación con la antiderivada para evaluar integrales definidas.

Conocimiento previo

Evaluación de funciones.

Actividad No. 9	Conocimiento previo	Individual – extra aula
Propósito: Evaluación de funciones algebraicas y trascendentales.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y la solución correcta a cada ejercicio propuesto.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora.		

Descripción de la actividad

Evalúa cada una de las siguientes funciones.

1) $f(x) = -\frac{5}{3}x^2$ en $x = -3$

9) $f(x) = \text{Csc}(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$

2) $g(x) = x^{3/2}$ en $x = 4$

10) $h(x) = \text{ArcSen}(x)$ en $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $x = -8$

11) $h(x) = e^{\frac{x}{3}}$ en $x = 0$

4) $f(x) = 5 + \text{Ln}(x)$ en $x = 1$

12) $g(x) = \text{Sec}^2(x)$ en $x = 0$

5) $h(x) = \text{Ln}(x^2)$ en $x = e$

13) $f(x) = \text{Senh}(x)$ en $x = 0$

6) $g(x) = e^{\text{Ln}(x)}$ en $x = 3$

14) $g(x) = \text{Cot}(x)$ en $x = \frac{3\pi}{4}$

7) $f(x) = \text{Cos}(x)$ en $x = \pi$

15) $h(x) = \text{Cos}^{-1}(2x)$ en $x = \frac{1}{2}$

8) $g(x) = \text{Tan}(x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$

1.7 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si F es una antiderivada de f en $[a, b]$, se establece que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

En donde a es llamado límite inferior y b es llamado límite superior.

En la siguiente tabla se muestran las propiedades de la integral definida.

Tabla 5. Propiedades de la integral definida
Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$ y K una constante, entonces: 1) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ 2) $\int_a^a f(x)dx = 0$ 3) $\int_a^b K f(x)dx = K \int_a^b f(x)dx$ 4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ 5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^K f(x)dx + \int_K^b f(x)dx$ siempre que f sea continua en $[a, K]$ y $[K, b]$



Continuidad de funciones. En este Q_R se muestra la continuidad de algunos tipos de funciones para aplicarla en las integrales definidas.

EJEMPLO

Resuelve cada una de las siguientes integrales definidas.

1) $\int_{-1}^2 (3 - 2x - x^2) dx$

$$\int_{-1}^2 (3 - 2x - x^2) dx = \left[3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$\int_{-1}^2 (3 - 2x - x^2) dx = \left[3(2) - (2)^2 - \frac{(2)^3}{3} \right] - \left[3(-1) - (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right]$$

$$\int_{-1}^2 (3 - 2x - x^2) dx = \left(6 - 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(-3 - 1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$\int_{-1}^2 (3 - 2x - x^2) dx = \left(2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} \right) = 6 - \frac{9}{3} = 6 - 3 = 3$$

2) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \right) dx$

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \right) dx = \int_1^4 x^{-1/2} dx - 2 \int_1^4 x^{1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^4 - \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_1^4$$

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \right) dx = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} - \frac{4}{3}(4)^{3/2} - \left[\frac{-4}{3}(1)^{3/2} \right] - 4 - 2 - \left(\frac{4}{3} \right) 8 + \frac{4}{3}$$

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \right) dx = 2 - \frac{32}{3} + \frac{4}{3} = \frac{-22}{3}$$

Cuando en una integral definida se hace una sustitución, los límites de integración se pueden cambiar de acuerdo a la sustitución “u” o dejarlos como estaban.

En los siguientes ejemplos se ilustra lo anterior.

$$3) \int_0^1 \sqrt{x+3} \, dx$$

Haciendo $u = x + 3$; $du = dx$; sustituyendo " u " y " dx ", resulta:

Si $u = x + 3$, cuando $x = 0$, el valor de $u = 3$ y cuando $x = 1$, el valor de $u = 4$

$$\int_0^1 \sqrt{x+3} \, dx = \int_3^4 u^{1/2} \, du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_3^4 = \frac{2}{3} [4^{3/2} - 3^{3/2}] = \frac{2}{3} (8 - 3\sqrt{3})$$

$$\int_0^1 \sqrt{x+3} \, dx = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$$

O bien, se utiliza la antiderivada en x y se sustituyen los límites dados en la integral definida:

$$\int_0^1 \sqrt{x+3} \, dx = \left[\frac{2}{3} (x+3)^{3/2} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} (4)^{3/2} \right] - \left[\frac{2}{3} (3)^{3/2} \right] = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$$

$$4) \int_0^{\ln 2} e^{3x} \, dx$$

Haciendo $u = 3x$; $du = 3dx$; despejando $dx = \frac{du}{3}$;

Sustituyendo " u " y " dx " en la integral con límites de 0 a $3\ln 2$, resulta:

$$\int_0^{\ln 2} e^{3x} \, dx = \int_0^{3\ln 2} e^u \left(\frac{du}{3} \right) = \left[\frac{1}{3} e^u \right]_0^{3\ln 2} = \frac{1}{3} [e^{3\ln 2} - e^0]$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} [e^{\ln 2^3} - 1] = \frac{1}{3} [e^{\ln 8} - 1] = \frac{1}{3} [8 - 1] = \frac{7}{3}$$

O bien, sustituyendo " u " en la antiderivada y los límites dados en la integral definida:

$$\int_0^{\ln 2} e^{3x} \, dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{3} [e^{3\ln 2} - e^0] = \frac{1}{3} [e^{\ln 8} - 1] = \frac{1}{3} [8 - 1] = \frac{7}{3}$$

$$5) \int_0^{\pi/12} \sec 3x \, dx$$

Haciendo $u = 3x$; $du = 3dx$; despejando $dx = \frac{du}{3}$;

Sustituyendo “ u ” y “ dx ” en la integral con límites de 0 a $\frac{\pi}{4}$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/12} \sec 3x \, dx &= \int_0^{\pi/4} \sec u \left(\frac{du}{3} \right) = \left[\frac{1}{3} \ln |\sec u + \tan u| \right]_0^{\pi/4} \\ \int_0^{\pi/12} \sec 3x \, dx &= \frac{1}{3} \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{4} \right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{3} \ln |\sec(0) + \tan(0)| \\ \int_0^{\pi/12} \sec 3x \, dx &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} \right)} + 1 \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{\cos(0)} + 0 \right| \\ \int_0^{\pi/12} \sec 3x \, dx &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 1 \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1}{1} \right| = \frac{1}{3} \ln |\sqrt{2} + 1| - \frac{1}{3} \ln |1| \\ \int_0^{\pi/12} \sec 3x \, dx &= \frac{1}{3} \ln |\sqrt{2} + 1| \end{aligned}$$

$$6) \int_0^5 |x - 3| \, dx$$

La función “valor absoluto de $x - 3$ ” se expresa, por definición, como:

$$|x - 3| = \begin{cases} -(x - 3) & x < 3 \\ (x - 3) & x \geq 3 \end{cases}$$

Entonces se aplica la propiedad 5 de la integral definida y la integral se expresa como:

$$\begin{aligned} \int_0^5 |x - 3| \, dx &= \int_0^3 -(x - 3) \, dx + \int_3^5 (x - 3) \, dx = - \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_0^3 + \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_3^5 \\ \int_0^5 |x - 3| \, dx &= - \left(\frac{9}{2} - 9 \right) + \left(\frac{25}{2} - 15 \right) - \left(\frac{9}{2} - 15 \right) = \frac{25}{2} \end{aligned}$$

- 7) El costo total C (en dólares) de compra y mantenimiento de una pieza de equipo durante x años, es:

$$C(x) = 5\,000 \left(25 + 3 \int_0^x t^{\frac{1}{4}} dt \right)$$

- a) Efectúa la integración para escribir C como una función de x .
- b) Encuentra $C(1)$, $C(5)$ y $C(10)$

SOLUCIÓN

- a) Se determina la función de costo resolviendo la integral involucrada; esto es:

$$C(x) = 125\,000 + 15\,000 \int_0^x t^{1/4} dt$$

$$C(x) = 125\,000 + 15\,000 \left(\frac{4}{5} \right) t^{5/4} \Big|_0^x$$

$$C(x) = 125\,000 + 12\,000 x^{5/4}$$

- b) Evaluando $C(1)$, $C(5)$ y $C(10)$, resulta:

$$C(1) = 125\,000 + 12\,000(1)^{5/4} = 137\,000$$

$$C(5) = 125\,000 + 12\,000(5)^{5/4} = 214\,720.93$$

$$C(10) = 125\,000 + 12\,000(10)^{5/4} = 338\,393.53$$

- 8) La fuerza F (en Newtons) de un cilindro hidráulico en una prensa es proporcional al cuadrado de $\sec x$, donde x es la distancia (en metros) que el cilindro se desplaza en su ciclo. El dominio de F es $[0, \pi/3]$ y $F(0) = 500$

- a. Encuentra F como una función de x .
- b. Determina la fuerza media ejercida por la prensa sobre el intervalo $[0, \pi/3]$.

SOLUCIÓN

a) La función de fuerza está dada por:

$$F = K \operatorname{Sec}^2 x$$

Se sustituyen las condiciones iniciales para calcular el valor de la constante K ; es decir, para $x = 0$, $F = 500$. Despejando K , resulta:

$$K = \frac{F}{\operatorname{Sec}^2 x} = \frac{500}{\operatorname{Sec}^2 0} = 500$$

Por lo tanto, la función de fuerza es:

$$F(x) = 500 \operatorname{Sec}^2 x$$

b) La fuerza media ejercida en el intervalo $[0, \pi/3]$ se calcula por:

$$F_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x) dx$$

$$F_m = \frac{1}{\pi/3} \int_0^{\pi/3} 500 \operatorname{Sec}^2 x \, dx$$

$$F_m = \frac{1 \, 500}{\pi} [\tan x]_0^{\pi/3}$$

$$F_m = \frac{1 \, 500 \sqrt{3}}{\pi} \, N$$



Integrales de funciones definidas por intervalos. En este Q_R se muestran integrales definidas o no definidas en un intervalo, dentro de los límites dados. Veamos cómo se resuelven.

EJERCICIO 1.7

Resuelve cada una de las siguientes integrales definidas.

1) $\int_1^8 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 4\sqrt[3]{x} \right) dx$

2) $\int_{-1}^1 \left(\frac{x^3-8}{x-2} \right) dx$

3) $\int_{-1}^1 (x^2 + 2)^2 dx$

4) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$

5) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} dx$

6) $\int_0^{\pi/2} \text{Sen } 2x \, dx$

7) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \text{Csc } x \, dx$

8) $\int_1^3 \text{Senh} \left(\frac{x}{2} \right) dx$

9) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

10) $\int_{-1}^3 |x-1| dx$

11) La probabilidad de que una persona recuerde entre a y b por ciento del material aprendido en un experimento es:

$$P_{a,b} = \int_{\frac{a}{100}}^{\frac{b}{100}} \frac{15}{4} x \sqrt{1-x} dx$$

Donde x representa el porcentaje recordado, ¿cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar recuerde entre 50 y 75% del material?

12) Experimento de la aguja de Buffon: Sobre un plano horizontal se trazan rectas paralelas separadas por una distancia de 2 pulgadas. Una aguja se lanza aleatoriamente sobre el plano. La probabilidad de que la aguja toque una recta está dada por:

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \text{Sen} \theta \, d\theta$$

Donde θ es el ángulo entre la aguja y cualquiera de las rectas paralelas. Determina esta probabilidad.

13) La temperatura en grados Fahrenheit en una casa está dada por:

$$T = 72 + 12 \text{ Sen} \left[\frac{\pi(t-8)}{12} \right]$$

Donde t es el tiempo en horas, con $t = 0$ representando la media noche. El costo horario de refrigeración de una casa es de 0.10 dólares por grado.

- a) Encuentra el costo C de refrigeración de la casa si el termostato se ajusta en 72°F , calculando la integral:

$$C = 0.1 \int_8^{20} \left[72 + 12 \text{Sen} \left[\frac{\pi(t-8)}{12} \right] - 72 \right] dt$$

- b) Encuentra el ahorro al reajustar el termostato en 78°F , calculando la integral:

$$C = 0.1 \int_{10}^{18} \left[72 + 12 \text{Sen} \left[\frac{\pi(t-8)}{12} \right] - 78 \right] dt$$

SOLUCIÓN

- 1) 54 2) $\frac{26}{3}$ 3) $\frac{166}{15}$ 4) 1 5) $\ln|10|$
 6) 1 7) 0 8) 2.44 9) $\frac{\pi}{3}$ 10) 4
 11) 0.353 12) 0.63662 13) a) \$9.17 b) \$6.05

Actividad No. 10	Integradora	Individual – extra aula
Propósito: Aplicación de integrales indefinidas y definidas en problemas de ingeniería.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y la solución correcta a cada ejercicio propuesto.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora.		

Descripción de la actividad

Resuelve los siguientes problemas.

1. Tiro vertical hacia arriba

¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo), para que su altura máxima coincida con la parte superior del Faro del Comercio, situado en la Macroplaza de la ciudad de Monterrey? El Faro del Comercio tiene una altura aproximada de 70.6 metros.

2. Ciclo respiratorio

Después de hacer ejercicio durante un tiempo determinado, una persona tiene un ciclo respiratorio para el cual la tasa de admisión de aire está dada por:

$$v = 1.75 \operatorname{Sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \text{ en litros / minuto}$$

Calcula el volumen, en litros, del aire inhalado durante un ciclo, integrando la función sobre el intervalo $0 \leq t \leq 3$ minutos.

3. Precio medio

La ecuación para la demanda de un producto está dada por:

$$P(x) = \frac{90\,000}{3x + 400}$$

Si el precio medio está dado por $P_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(x) dx$, determina su precio medio en el intervalo $[30,40]$.

4. Probabilidad

El tiempo medio de espera “x” (en minutos) en una tienda de autoservicio está dado por la solución de la ecuación:

$$\int_0^x 0.3e^{-0.3t} dt = \frac{1}{2}$$

Resuelve la ecuación.



Capítulo 2

Métodos de Integración

Competencia particular 2

Analizar las características del integrando a través de sus elementos para seleccionar y aplicar el método más adecuado en la solución de integrales definidas e indefinidas.

Elemento de competencia 5

Identificar las características de cada método mediante el análisis del integrando para evaluar integrales definidas e indefinidas.

Introducción

Los métodos de integración se utilizan para resolver integrales que, por lo regular, no pueden ser resueltas por ninguna de las fórmulas que se generan en el proceso de cambio de variable, o bien, cuando este proceso complica su solución.

Para identificar el método más conveniente, que resuelva la integral, se deben analizar las características principales en el integrando, las cuales se mencionarán en la explicación de cada método.

En este capítulo se presentan 4 métodos de integración, que son:

- Integración por partes.
- Integración de potencias de funciones trigonométricas.
- Sustitución trigonométrica.
- Integración de funciones racionales.

Al empezar este capítulo, el estudiante ya debe estar familiarizado con el siguiente resultado, de manera que resuelva directamente integrales que contienen en sus integrandos funciones exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas.

$$\text{Si } \int f(x) dx = F(x) + C \implies \int f(ax) dx = \frac{F(ax)}{a} + C; \quad a \neq 0$$

Por ejemplo:

$$1) \text{ Si } \int \cos x \, dx = \sin x + C \implies \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$2) \text{ Si } \int e^x \, dx = e^x + C \implies \int e^{-3x} \, dx = \frac{-1}{3} e^{-3x} + C$$

$$3) \text{ Si } \int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C \implies \int \tan 5x \, dx = \frac{1}{5} \ln|\sec 5x| + C$$

Se continúa ahora con las técnicas o métodos de integración.

2.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

El método de integración por partes se utiliza para solucionar un gran número de integrales, donde el integrando está formado por el producto de dos funciones.

Este método, permite reescribir la integral dada como el producto de dos funciones menos una integral que es más sencilla de calcular que la integral original.

La integral por partes se expresa como:

Integral por partes
$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

En donde u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas.

DEMOSTRACIÓN

Esta fórmula se genera del diferencial de un producto ($u * v$), que está dado por:

$$d(u * v) = u \, dv + v \, du$$

Integrando ambos lados de la ecuación, queda:

$$\begin{aligned}\int d(u * v) &= \int (u \, dv + v \, du) \\ u * v &= \int u \, dv + \int v \, du\end{aligned}$$

Despejando, resulta que:

$$\int u \, dv = u * v - \int v \, du$$

Como se puede observar, al aplicar este método, el integrando se divide en dos partes, “*u*” y “*dv*”, las cuales, cuando sea posible, se pueden seleccionar mediante el siguiente acrónimo:

L	I	A	T	E
o g a r í t m i c a s	n v e r s a s	l g e b r a i c a s	r i g o n o m é t r i c a s	x p o n e n c i a l e s

De donde la “*u*” se selecciona por orden de aparición en el acrónimo, de izquierda a derecha y el “*dv*” de derecha a izquierda. El diferencial que aparezca en el integrando forma parte del “*dv*”.

En caso de que esta elección no funcione, se debe considerar que “*u*” debe ser la parte que se pueda derivar fácilmente del integrando y que el “*dv*” debe ser la parte fácilmente integrable del mismo.

Se pueden presentar **integraciones sucesivas**, es decir, que se requiere integrar consecutivamente por partes, en integrales; por lo regular, de la forma: $\int e^{ax} \text{Sen } bx \, dx$; $\int e^{ax} \text{Cos } bx \, dx$; $\int [p(x)]^n e^{ax} \, dx$; en donde $p(x)$ es una función polinomial de grado $n \geq 1$; a y b son constantes diferentes de cero.

Observa el ejemplo 5.

Además se pueden presentar **integrales de ciclo**, es decir, cuando al integrar sucesivamente por partes se presenta la integral original; entonces se debe despejar dicha integral para romper el ciclo. Por lo regular, esta integración se presenta en integrales de la forma:

$$\int e^{ax} \text{Sen } bx \, dx; \int e^{ax} \text{Cos } bx \, dx; \int \text{Sec}^n u \, du; \int \text{Csc}^n u \, du; \int \text{Tan}^m u \text{Sec}^n u \, du; \int \text{Cot}^m u \text{Csc}^n u \, du$$

En donde a y b son constantes diferentes de cero; m es par y n es impar.

Observa los ejemplos 6, 7 y 8.

Procedimiento para aplicar el método de integración por partes

1. Identificar las partes, " u " y " dv ", si es posible, mediante el LIATE.
2. Derivar " u ".
3. Integrar " dv ". Se sugiere, para fines prácticos, omitir las constantes de integración durante el procedimiento de solución y únicamente se sumará " C " al resultado final.
4. Sustituir en la fórmula: $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$
5. Resolver la integral resultante.

NOTA: En los siguientes ejemplos; en cada integral indefinida que se resuelve debe sumarse la constante de integración. Para fines prácticos, se omitirán las constantes durante el procedimiento de solución y únicamente se sumará C al resultado final. La constante C representará la suma de todas las demás constantes.

EJEMPLO

Calcula las siguientes integrales.

1) $\int x e^{-3x} \, dx$

Eliendo como u la función algebraica y como dv el resto del integrando:

$$u = x, \quad dv = e^{-3x} \, dx, \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{3} e^{-3x}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int x e^{-3x} \, dx = (x) \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) - \int \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) (dx)$$

$$\int x e^{-3x} \, dx = -\frac{x}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} \, dx$$

$$\int x e^{-3x} \, dx = -\frac{x}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-3x}}{-3} \right) + C$$

$$\int x e^{-3x} \, dx = -\frac{x}{3} e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C$$

$$2) \int_1^2 x \ln x \, dx$$

Eligiendo como u la función logarítmica y como dv el resto del integrando:

$$u = \ln x, \quad dv = x \, dx, \quad du = \frac{1}{x} \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = (\ln x) \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx$$

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = \left[\frac{(2)^2}{2} \ln(2) - \frac{4}{4} \right] - \left[\frac{(1)^2}{2} \ln(1) - \frac{1}{4} \right]$$

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = 2 \ln(2) - 1 - 0 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$$

$$3) \int \text{Sen}^{-1} 3x \, dx$$

Eligiendo la función inversa como u y dx como dv :

$$u = \text{Sen}^{-1} 3x, \quad dv = dx, \quad du = \frac{3}{\sqrt{1 - (3x)^2}} \, dx, \quad v = x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int \text{Sen}^{-1} 3x \, dx = (\text{Sen}^{-1} 3x)(x) - \int (x) \left(\frac{3}{\sqrt{1 - (3x)^2}} \, dx \right)$$

$$\int \text{Sen}^{-1} 3x \, dx = x(\text{Sen}^{-1} 3x) - \int \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} \, dx$$

Haciendo cambio de variable en la integral resultante:

$$u = 1 - 9x^2, \quad du = -18x \, dx, \quad dx = \frac{du}{-18x}$$

Sustituyendo u y dx en la integral, queda:

$$\int \operatorname{Sen}^{-1} 3x \, dx = x(\operatorname{Sen}^{-1} 3x) - \int \frac{3x}{u^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{-18x} = x(\operatorname{Sen}^{-1} 3x) + \frac{1}{6} \int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \operatorname{Sen}^{-1} 3x \, dx = x(\operatorname{Sen}^{-1} 3x) + \frac{1}{6} \int u^{-\frac{1}{2}} \, du = x(\operatorname{Sen}^{-1} 3x) + \frac{2}{6} (1 - 9x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \operatorname{Sen}^{-1} 3x \, dx = x(\operatorname{Sen}^{-1} 3x) + \frac{1}{3} (1 - 9x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

4) $\int x^5 e^{x^3} \, dx$

Primer procedimiento

Se separa $x^5 = x^2(x^3)$ para seleccionar $dv = x^2 e^{x^3} \, dx$, de manera que:

$$v = \frac{1}{3} e^{x^3}; \quad u = x^3; \quad du = 3x^2 \, dx.$$

Sustituyendo en la fórmula $\int u \, dv = u * v - \int v \, du$ y simplificando, resulta:

$$\int x^5 e^{x^3} \, dx = x^3 \left(\frac{1}{3} e^{x^3} \right) - \int \frac{1}{3} e^{x^3} (3x^2 \, dx) = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3} \, dx$$

$$\int x^5 e^{x^3} \, dx = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

Segundo procedimiento: haciendo una doble sustitución

Haciendo $z = x^3$; $dz = 3x^2 \, dx$; $dx = \frac{dz}{3x^2}$ y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int x^5 e^{x^3} \, dx = \int x^5 e^z \left(\frac{dz}{3x^2} \right) = \frac{1}{3} \int x^3 e^z \, dz = \frac{1}{3} \int z e^z \, dz$$

Resolviendo la integral resultante por el método de integración por partes, haciendo:

$$u = z; \quad du = dz; \quad dv = e^z \, dz; \quad v = e^z$$

Sustituyendo en la fórmula $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$ y simplificando, resulta:

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \left[z e^z - \int e^z dz \right] + C$$

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} z e^z - \frac{1}{3} e^z + C$$

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

5) $\int x^2 \cos 2x \, dx$

Eligiendo la función algebraica como u y el resto del integrando como dv :

$$u = x^2, \quad dv = \cos 2x \, dx, \quad du = 2x \, dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, queda:

$$\int x^2 \cos 2x \, dx = (x^2) \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) - \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) (2x \, dx)$$

$$\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x - \int x (\sin 2x) \, dx$$

Para la segunda integral resultante se aplica la integración por partes de nuevo:

$$u = x, \quad dv = \sin 2x \, dx, \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, en la segunda integral, queda:

$$\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x - \left[(x) \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) (dx) \right]$$

$$\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$6) \int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt$$

Eligiendo la función trigonométrica como u y el resto del integrando como dv :

$$u = \operatorname{Sen} t, \quad dv = e^{2t} \, dt, \quad du = \operatorname{Cos} t \, dt, \quad v = \frac{1}{2} e^{2t}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ en la segunda integral, queda:

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = (\operatorname{Sen} t) \left(\frac{1}{2} e^{2t} \right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{2t} \right) (\operatorname{Cos} t \, dt)$$

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{Sen} t - \frac{1}{2} \int (e^{2t}) (\operatorname{Cos} t \, dt)$$

Para la segunda integral, se elige la función trigonométrica como u y el resto del integrando como dv :

$$u = \operatorname{Cos} t, \quad dv = e^{2t} \, dt, \quad du = -\operatorname{Sen} t \, dt, \quad v = \frac{1}{2} e^{2t}$$

Aplicando nuevamente la fórmula de integración por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ en la segunda integral, queda:

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{Sen} t - \frac{1}{2} \left[(\operatorname{Cos} t) \left(\frac{1}{2} e^{2t} \right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{2t} \right) (-\operatorname{Sen} t \, dt) \right]$$

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{Sen} t - \frac{1}{4} (\operatorname{Cos} t)(e^{2t}) - \frac{1}{4} \int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt$$

Pasando la última integral al lado izquierdo, queda:

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt + \frac{1}{4} \int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{Sen} t - \frac{1}{4} (\operatorname{Cos} t)(e^{2t})$$

$$\frac{5}{4} \int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{Sen} t - \frac{1}{4} (\operatorname{Cos} t)(e^{2t})$$

Se multiplica por $\frac{4}{5}$ en ambos lados y resulta:

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{1}{2} e^{2t} \operatorname{Sen} t\right) - \left(\frac{4}{5}\right) \frac{1}{4} (\operatorname{Cos} t)(e^{2t})$$

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \left(\frac{2}{5}\right) (e^{2t} \operatorname{Sen} t) - \left(\frac{1}{5}\right) (e^{2t} \operatorname{Cos} t) + C$$

$$\int e^{2t} \operatorname{Sen} t \, dt = \left(\frac{1}{5}\right) e^{2t} [2 \operatorname{Sen} t - \operatorname{Cos} t] + C$$

7) $\int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt$

$$\int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt = \int \operatorname{Csc}^2 2t \operatorname{Csc} 2t \, dt$$

La integral se resuelve integrando por partes. Elegimos:

$$u = \operatorname{Csc} 2t \quad du = -2 \operatorname{Csc} 2t \operatorname{Cot} 2t \, dt \quad dv = \operatorname{Csc}^2 2t \, dt \quad v = -\frac{1}{2} \operatorname{Cot} 2t$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, queda:

$$\int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Cot} 2t \operatorname{Csc} 2t - \int \operatorname{Cot}^2 2t \operatorname{Csc} 2t \, dt$$

$$\int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Cot} 2t \operatorname{Csc} 2t - \int (\operatorname{Csc}^2 2t - 1) \operatorname{Csc} 2t \, dt$$

$$\int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Cot} 2t \operatorname{Csc} 2t - \int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt + \int \operatorname{Csc} 2t \, dt$$

$$2 \int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Cot} 2t \operatorname{Csc} 2t + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{Csc} 2t - \operatorname{Ctg} 2t| + C$$

$$\int \operatorname{Csc}^3 2t \, dt = -\frac{1}{4} \operatorname{Cot} 2t \operatorname{Csc} 2t + \frac{1}{4} \ln |\operatorname{Csc} 2t - \operatorname{Cot} 2t| + C$$

$$8) \int \sec^5 x \, dx$$

$$\int \sec^5 x \, dx = \int \sec^3 x \sec^2 x \, dx$$

La integral se resuelve integrando por partes. Elegimos:

$$u = \sec^3 x \quad du = 3 \sec^2 x \sec x \tan x \, dx \quad dv = \sec^2 x \, dx \quad v = \tan x$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, queda:

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x \, dx &= \sec^3 x \tan x - 3 \int \tan^2 x \sec^3 x \, dx \\ \int \sec^5 x \, dx &= \sec^3 x \tan x - 3 \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\ \int \sec^5 x \, dx &= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^5 x \, dx + 3 \int \sec^3 x \, dx \\ 4 \int \sec^5 x \, dx &= \sec^3 x \tan x + 3 \int \sec^3 x \, dx \\ \int \sec^5 x \, dx &= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx \end{aligned}$$

Se calcula aparte la segunda integral:

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \sec x \, dx$$

Resolviendo por partes:

$$u = \sec x \quad du = \sec x \tan x \, dx$$

$$dv = \sec^2 x \, dx \quad v = \tan x$$

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x \, dx \\ \int \sec^3 x \, dx &= \tan x \sec x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\ \int \sec^3 x \, dx &= \tan x \sec x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\ 2 \int \sec^3 x \, dx &= \tan x \sec x + \int \sec x \, dx \\ 2 \int \sec^3 x \, dx &= \tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \sec^3 x \, dx &= \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

Se sustituye el valor de la segunda integral y se obtiene el resultado:

$$\int \sec^5 x \, dx = \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \right] + C$$

$$\int \sec^5 x \, dx = \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{8} \tan x \sec x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

9) Resuelve la ecuación diferencial dada, haciendo $y' = dy/dx$.

$$y' = x e^{3x}$$

SOLUCIÓN

Sustituyendo y' y despejando dy , resulta:

$$dy = x e^{3x} \, dx$$

Se integran ambos lados de la ecuación, para eliminar los diferenciales:

$$\int dy = \int x e^{3x} \, dx$$

El lado derecho de la ecuación se integra por partes, haciendo:

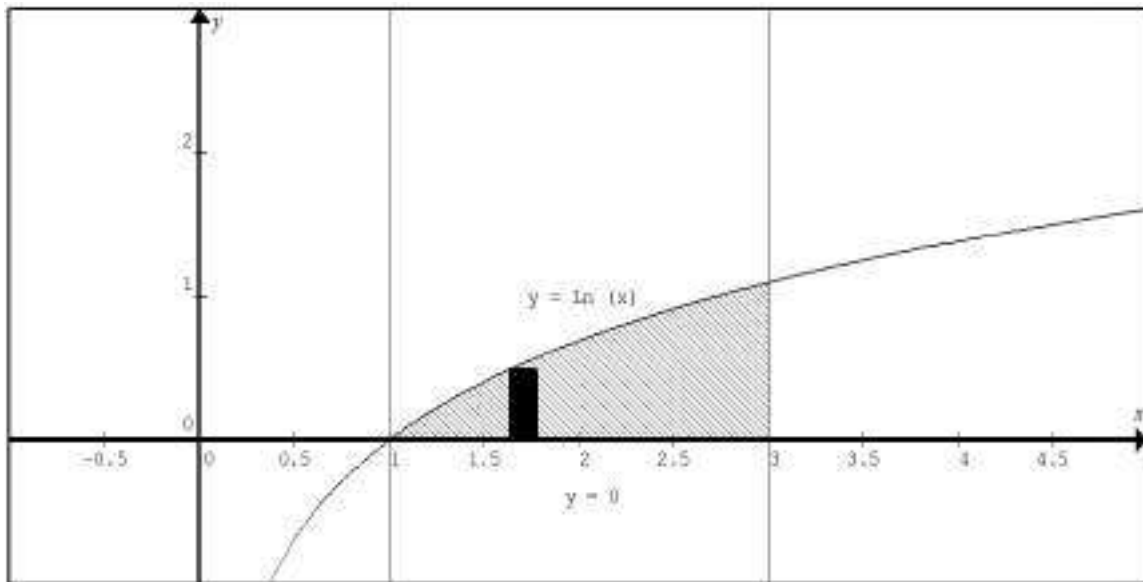
$$u = x; \, du = dx$$

$$dv = \int e^{3x} \, dx; \, v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \, dx$$

$$y = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

10) Si el área de la región mostrada en la figura está dada por $A = \int_1^3 \ln x \, dx$, calcula dicha área.



SOLUCIÓN

Se resuelve por partes la integral dada, haciendo:

$$u = \ln x; du = \frac{dx}{x}; dv = dx \text{ y } v = x$$

$$A = \ln x (x)|_1^3 - \int_1^3 x \left(\frac{dx}{x} \right) = [x \ln x - x]_1^3 = (3 \ln 3 - 3) - (\ln 1 - 1)$$

$$A = 3 \ln 3 - 2 \cong 1.29$$

Actividad No. 11	Conocimiento previo	Individual – extra aula
Propósito: Análisis de las características del método de integración por partes, como introducción al tema.		
Criterio de evaluación: Se evaluará el reporte que contenga los procedimientos y la solución correcta a cada ejercicio propuesto.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora.		

Descripción de la actividad

Selecciona correctamente “ u ” y “ dv ” para las funciones polinomiales, exponenciales, trigonométricas, inversas y logarítmicas. Argumenta la selección de “ u ” y “ dv ” en cada situación.

$$\int x \cos x dx$$

$$\int x e^x dx$$

$$\int e^x \cos x dx$$

$$\int \ln x dx$$

$$\int x^2 \cos x dx$$

$$\int x 2^x dx$$

$$\int e^x \sin 2x dx$$

$$\int x \ln x dx$$

$$\int x \sec^2 x dx$$

$$\int x^2 5^x dx$$

$$\int x \cosh^{-1} x dx$$

$$\int x^2 \ln x dx$$

$$\int x^3 \cos x^2 dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

$$\int x^2 \tan^{-1} x dx$$

$$\int x^3 \ln x dx$$



Método simplificado para integrar por partes mediante una tabulación. Este método se puede aplicar a integrales de la forma:

$$\int [p(x)]^n \sin bx dx; \int [p(x)]^n \cos bx dx; \int [p(x)]^n e^{ax} dx;$$

en donde $p(x)$ es una función polinomial de grado $n \geq 1$; a y b son constantes diferentes de cero.

EJERCICIO 2.1

Resuelve las siguientes integrales.

1) $\int x(2x - 1)^5 dx$

2) $\int z e^{5z} dz$

3) $\int y^2 \ln y dy$

4) $\int t e^{-t} dt$

5) $\int 2x \cos x dx$

6) $\int x \operatorname{Sen}(3x) dx$

7) $\int \operatorname{Arc Tan}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

8) $\int \operatorname{Sen}(x) \ln(\cos x) dx$

9) $\int x^3 e^{2x^2} dx$

10) $\int x^2 \operatorname{Sen}(3x) dx$

11) $\int w^3 e^{2w} dw$

12) $\int y^4 \cos y dy$

13) $\int e^{2x} \cos(2x) dx$

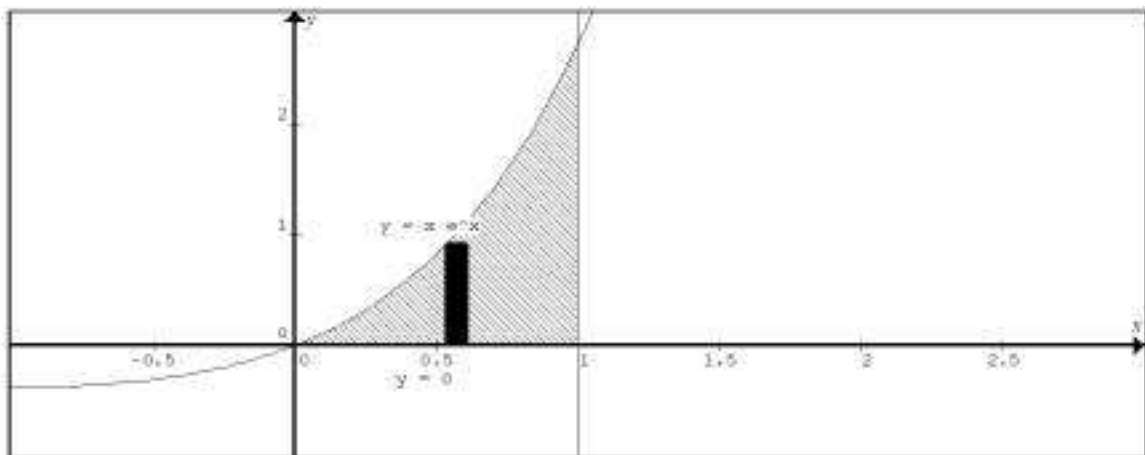
14) $\int e^t \operatorname{Sen}(3t) dt$

15) $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \operatorname{Sen}(x) dx$

16) Resuelve la ecuación diferencial dada, haciendo $y' = dy/dx$

$$y' = x \cos x$$

17) Si el área de la región mostrada en la figura está dada por $A = \int_1^3 x e^x dx$, calcula dicha área.



SOLUCIÓN

$$1) \frac{1}{12}x(2x-1)^6 - \frac{1}{168}(2x-1)^7 + C$$

$$2) \frac{1}{25}e^{5z}(5z-1) + C$$

$$3) \frac{1}{3}y^3 \ln y - \frac{1}{9}y^3 + C$$

$$4) -e^{-t}(t+1) + C$$

$$5) 2x \operatorname{Sen} x + 2 \operatorname{Cos} x + C$$

$$6) \frac{-1}{3}x \operatorname{Cos}(3x) + \frac{1}{9} \operatorname{Sen}(3x) + C$$

$$7) x \operatorname{ArcTan}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln|x^2+4| + C$$

$$8) \operatorname{Cos}(x)[1 - \ln(\operatorname{Cos} x)] + C$$

$$9) \frac{1}{8}e^{2x^2}(2x^2-1) + C$$

$$10) \frac{-1}{3}x^2 \operatorname{Cos}(3x) + \frac{2}{9}x \operatorname{Sen}(3x) + \frac{2}{27} \operatorname{Cos}(3x) + C$$

$$11) \frac{1}{8}e^{2w}(4w^3 - 6w^2 + 6w - 3) + C$$

$$12) y^4 \operatorname{Sen} y + 4y^3 \operatorname{Cos} y - 12y^2 \operatorname{Sen} y - 24y \operatorname{Cos} y + 24 \operatorname{Sen} y + C$$

$$13) \frac{1}{4}e^{2x}(\operatorname{Cos} 2x + \operatorname{Sen} 2x) + C$$

$$14) \frac{1}{10}e^t \operatorname{Sen}(3t) - \frac{3}{10}e^t \operatorname{Cos}(3t) + C$$

$$15) \frac{1}{2e^\pi}(e^{2\pi} - 1)$$

$$16) x \operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x + C$$

$$17) A = 40.17u^2$$

2.2 MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE POTENCIAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Actividad de conocimiento previo

Actividad No. 12	Conocimiento previo	Individual – en el aula
Propósito: Analizar las condiciones para aplicar cada uno de los casos trigonométricos, como introducción al tema.		
Criterio de evaluación: Reporte que muestre la redacción correcta y concreta de la estrategia requerida.		
Tiempo estimado para la actividad: 1 hora clase.		

Descripción de la actividad

- 1) Explica cuál es tu estrategia para evaluar integrales que contienen senos o cosenos.
 - a) Con la potencia de la función seno impar positiva.
 - b) Con la potencia de la función coseno impar positiva.
 - c) Si las potencias de ambos son pares y positivas.
- 2) Describe cómo integrar $\int \text{Sen}^m x \text{Cos}^n x \, dx$ para cada condición.
 - a) m es positivo e impar.
 - b) n es positivo e impar.
 - c) m y n son positivos e impares.
- 3) Describe cómo integrar $\int \text{Sec}^m x \text{Tan}^n x \, dx$ para cada condición.
 - a) m es positivo y par.
 - b) n es positivo e impar.
 - c) n es positivo y par y no hay factor secante.
 - d) m es positivo e impar y no hay factor tangente.

En algunas integrales aparecen funciones trigonométricas o potencias de funciones trigonométricas. Para calcular dichas integrales, se verán en esta sección diferentes maneras de hacerlo, aplicando conocimientos de álgebra, trigonometría y los conocimientos previos de cálculo integral.

Se presentan ocho casos que dependen de la o las funciones trigonométricas contenidas en el integrando y de sus exponentes o argumentos, que son:

CASO I

Se presenta cuando el integrando contiene la función Seno o Coseno elevadas a una potencia entera impar positiva. Se expresa como:

$\int \text{Sen}^n u \, du ; \int \text{Cos}^n u \, du$, en donde “n” es un entero impar positivo.

Expresa:

$$\text{Sen}^n u = \text{Sen}^{n-1} u \text{ Sen } u \text{ y usar: } \text{Sen}^2 u = 1 - \text{Cos}^2 u$$

$$\text{Cos}^n u = \text{Cos}^{n-1} u \text{ Cos } u \text{ y usar: } \text{Cos}^2 u = 1 - \text{Sen}^2 u$$

EJEMPLOS

1) $\int \text{Sen}^5 x \, dx$

Reescribiendo $\int \text{Sen}^5 x \, dx$ como $\int (\text{sen}^2 x)^2 \text{Sen } x \, dx$.

Despejando $\text{Sen}^2 x = 1 - \text{Cos}^2 x$ de la identidad $\text{Sen}^2 u + \text{Cos}^2 u = 1$ y sustituyendo en la integral, queda:

$$\int \text{Sen}^5 x \, dx = \int (\text{sen}^2 x)^2 \text{Sen } x \, dx = \int (1 - \text{Cos}^2 x)^2 \text{Sen } x \, dx$$

Nota que únicamente quedó un término $\text{Sen } x$, que forma parte del du , por lo tanto, conviene que $u = \text{Cos } x$. Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = \text{Cos } x, \quad du = -\text{Sen } x \, dx, \quad dx = \frac{du}{-\text{Sen } x}$$

Sustituyendo u y du en la integral y simplificando, queda:

$$\begin{aligned} \int \text{Sen}^5 x \, dx &= \int (1 - u^2)^2 \text{Sen } x \frac{du}{-\text{Sen } x} \\ \int \text{Sen}^5 x \, dx &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = -u + 2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \end{aligned}$$

Regresando a u su valor original, queda:

$$\int \text{Sen}^5 x \, dx = -\text{Cos } x + \frac{2}{3} \text{Cos}^3 x - \frac{1}{5} \text{Cos}^5 x + C$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt$$

$$\text{Haciendo } \cos^3(t) = \cos^2(t)\cos(t)$$

Usando $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ y simplificando, resulta:

$$\cos^3(t) = [1 - \sin^2(t)]\cos(t) = \cos(t) - \sin^2(t)\cos(t)$$

Sustituyendo en la integral, queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(t) - \sin^2(t)\cos(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos(t) dt$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt = \left[\sin(t) - \frac{1}{3} \sin^3(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[\sin(0) - \frac{1}{3} \sin^3(0) \right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

CASO II

Se presenta cuando el integrando contiene un producto de Seno por Coseno, en donde al menos una función está elevada a una potencia entera impar positiva. Se expresa la función de la potencia impar como en el Caso I. Si ambas potencias son enteras impares positivas, se expresa la potencia impar menor, como el Caso I, y si ambas potencias son enteras impares positivas e iguales, sólo una de las funciones se expresa como el Caso I. Se expresa como:

$\int \sin^m u \cos^n u du$, en donde al menos un exponente es un entero impar positivo.

Expresa la función que contiene el exponente entero impar positivo como:

$$\sin^n u = \sin^{n-1} u \sin u \text{ y usar: } \sin^2 u = 1 - \cos^2 u$$

$$\cos^n u = \cos^{n-1} u \cos u \text{ y usar: } \cos^2 u = 1 - \sin^2 u$$

$$3) \int \text{Sen}^3 5x \text{Cos}^2 5x \, dx$$

Estrategia

Reescribiendo la integral $\int \text{Sen}^3 5x \text{Cos}^2 5x \, dx$ como $\int \text{Sen}^2 5x \text{Sen} 5x \text{Cos}^2 5x \, dx$, despejando $\text{Sen}^2 5x = 1 - \text{Cos}^2 5x$ de la identidad $\text{Sen}^2 u + \text{Cos}^2 u = 1$ y sustituyendo $(1 - \text{Cos}^2 5x)$ en el factor $(\text{Sen}^2 5x)$:

$$\begin{aligned} \int \text{Sen}^3 5x \text{Cos}^2 5x \, dx &= \int \text{Sen}^2 5x \text{Sen} 5x \text{Cos}^2 5x \, dx \\ \int \text{Sen}^3 5x \text{Cos}^2 5x \, dx &= \int (1 - \text{Cos}^2 5x) \text{Cos}^2 5x \text{Sen} 5x \, dx \end{aligned}$$

Nota que únicamente quedó un término $\text{Sen} 5x$, que forma parte del du , por lo tanto conviene que $u = \text{Cos} 5x$. Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = \text{Cos} 5x, \quad du = -5 \text{Sen} 5x \, dx, \quad dx = \frac{du}{-5 \text{Sen} 5x}$$

Sustituyendo u y du en la integral y simplificando, queda:

$$\begin{aligned} \int \text{Sen}^3 5x \text{Cos}^2 5x \, dx &= \int (1 - u^2) u^2 \text{Sen} 5x \frac{du}{-5 \text{Sen} 5x} = -\frac{1}{5} \int (1 - u^2) u^2 \, du \\ \int \text{Sen}^3 5x \text{Cos}^2 5x \, dx &= -\frac{1}{5} \int u^2 \, du + \frac{1}{5} \int u^4 \, du = -\frac{1}{5} \frac{u^3}{3} + \frac{1}{5} \frac{u^5}{5} + C \end{aligned}$$

Regresando a u su valor original, queda:

$$\int \text{Sen}^3 5x \text{Cos}^2 5x \, dx = -\frac{1}{15} \text{Cos}^3 5x + \frac{1}{25} \text{Cos}^5 5x + C$$

$$4) \int \text{Sen}^5(x) \text{Cos}^3(x) \, dx$$

Como la función Coseno está elevada a la potencia impar más pequeña, entonces se sugiere aplicar el Caso I a dicha función:

Haciendo $\text{Cos}^3(x) = \text{Cos}^2(x)\text{Cos}(x)$, usando $\text{Cos}^2(x) = 1 - \text{Sen}^2(x)$ y simplificando, resulta:

$$\text{Cos}^3(x) = [1 - \text{Sen}^2(x)]\text{Cos}(x) = \text{Cos}(x) - \text{Sen}^2(x)\text{Cos}(x)$$

Sustituyendo en la integral y multiplicando, queda:

$$\int \text{Sen}^5(x) \text{Cos}^3(x) dx = \int \text{Sen}^5(x) [\text{Cos}(x) - \text{Sen}^2(x) \text{Cos}(x)] dx$$
$$\int \text{Sen}^5(x) \text{Cos}^3(x) dx = \int \text{Sen}^5(x) \text{Cos}(x) dx - \int \text{Sen}^7(x) \text{Cos}(x) dx$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int \text{Sen}^5(x) \text{Cos}^3(x) dx = \frac{1}{6} \text{Sen}^6(x) - \frac{1}{8} \text{Sen}^8(x) + C$$

5) $\int \text{Sen}^3(x) \text{Cos}^3(x) dx$

Como ambas funciones están elevadas a la misma potencia entera impar positiva, entonces se puede aplicar el Caso I a cualquiera de las dos.

Primer procedimiento: Aplicando el Caso I a la función Seno

Haciendo $\text{Sen}^3(x) = \text{Sen}^2(x) \text{Sen}(x)$

Usando $\text{Sen}^2(x) = 1 - \text{Cos}^2(x)$ y simplificando, resulta:

$$\text{Sen}^3(x) = [1 - \text{Cos}^2(x)] \text{Sen}(x) = \text{Sen}(x) - \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x)$$

Sustituyendo en la integral y multiplicando, queda:

$$\int \text{Sen}^3(x) \text{Cos}^3(x) dx = \int [\text{Sen}(x) - \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x)] \text{Cos}^3(x) dx$$
$$\int \text{Sen}^3(x) \text{Cos}^3(x) dx = \int \text{Cos}^3(x) \text{Sen}(x) dx - \int \text{Cos}^5(x) \text{Sen}(x) dx$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int \text{Sen}^3(x) \text{Cos}^3(x) dx = -\frac{1}{4} \text{Cos}^4(x) + \frac{1}{6} \text{Cos}^6(x) + C$$

Segundo procedimiento: Aplicando el Caso I a la función Coseno.

$$\text{Haciendo } \cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x)$$

Usando $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ y simplificando, resulta:

$$\cos^3(x) = [1 - \sin^2(x)]\cos(x) = \cos(x) - \sin^2(x)\cos(x)$$

Sustituyendo en la integral y multiplicando, queda:

$$\int \sin^3(x) \cos^3(x) dx = \int \sin^3(x) [\cos(x) - \sin^2(x)\cos(x)] dx$$

$$\int \sin^3(x) \cos^3(x) dx = \int \sin^3(x)\cos(x) dx - \int \sin^5(x)\cos(x) dx$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int \sin^3(x) \cos^3(x) dx = \frac{1}{4}\sin^4(x) - \frac{1}{6}\sin^6(x) + C$$

NOTA: Ambos resultados son correctos. Se deja al estudiante la demostración mediante el uso de identidades trigonométricas.

CASO III

Se presenta cuando el integrando contiene la función Seno o Coseno o Seno por Coseno, en donde, todas las funciones están elevadas a una potencia entera par positiva. Se expresa como:

$\int \sin^m u \, du; \int \cos^n u \, du; \int \sin^m u \cos^n u \, du$, en donde “m” y “n” son enteros pares positivos.

Expresa:

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$$

$$6) \int \cos^4 3x \, dx$$

Estrategia

Reescribe $\int \cos^4 3x \, dx$ como $\int \cos^2 3x \cos^2 3x \, dx$, la identidad útil para este caso es $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$. Sustituyendo $\left(\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}\right)$ en los factores $(\cos^2 3x)$, queda:

$$\int \cos^4 3x \, dx = \int \cos^2 3x \cos^2 3x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) dx$$

$$\int \cos^4 3x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x) dx$$

Reescribiendo como una suma de integrales, completando diferenciales e integrando, queda:

$$\int \cos^4 3x \, dx = \frac{1}{4} \int (1) dx + \frac{1}{4} \int 2\cos 6x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 6x \, dx$$

$$\int \cos^4 3x \, dx = \frac{1}{4}x + \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\sin 6x + \frac{1}{4} \int \cos^2 6x \, dx$$

Aplicando de nuevo la identidad:

$$\int \cos^4 3x \, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1+\cos 12x}{2}\right) dx$$

$$\int \cos^4 3x \, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 12x \, dx$$

$$\int \cos^4 3x \, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sin 12x + C$$

Sumando términos semejantes:

$$\int \cos^4 3x \, dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + C$$

$$7) \int \text{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Haciendo $\text{Sen}^2(x) = \frac{1-\text{Cos}\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{2} = \frac{1-\text{Cos}(x)}{2}$, sustituyendo en la integral, queda:

$$\int \text{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \left[\frac{1-\text{Cos}(x)}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \text{Cos}(x) dx$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int \text{Sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\text{Sen}(x) + C$$

$$8) \int \text{Sen}^2(x)\text{Cos}^2(x) dx$$

Haciendo $\text{Sen}^2(x) = \frac{1-\text{Cos } 2x}{2} = \frac{1-\text{Cos}(2x)}{2}$ y $\text{Cos}^2(x) = \frac{1+\text{Cos } 2x}{2} = \frac{1+\text{Cos}(2x)}{2}$

Sustituyendo en la integral y simplificando, queda:

$$\int \text{Sen}^2(x)\text{Cos}^2(x) dx = \int \left[\frac{1-\text{Cos}(2x)}{2} \right] \left[\frac{1+\text{Cos}(2x)}{2} \right] dx$$

$$\int \text{Sen}^2(x)\text{Cos}^2(x) dx = \int \left[\frac{1-\text{Cos}^2(2x)}{4} \right] dx = \frac{1}{4} \int \text{Sen}^2(2x) dx$$

Haciendo $\text{Sen}^2(2x) = \frac{1-\text{Cos}[2(2x)]}{2} = \frac{1-\text{Cos}(4x)}{2}$ y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \text{Sen}^2(x)\text{Cos}^2(x) dx = \frac{1}{4} \int \left[\frac{1-\text{Cos}(4x)}{2} \right] dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \text{Cos}(4x) dx$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int \text{Sen}^2(x)\text{Cos}^2(x) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\text{Sen}(4x) + C$$

CASO IV

Se presenta cuando el integrando contiene un producto de Seno por Seno, por Coseno, o bien, Seno por Coseno con **argumentos diferentes**.

Se expresa como:

$\int \text{Sen}(au) \text{Sen}(bu) du$; $\int \text{Cos}(au) \text{Cos}(bu) du$; $\int \text{Sen}(au) \text{Cos}(bu) du$, en donde "a" y "b" son cualquier número.

Expresa:

$$\text{Sen } A \text{ Sen } B = \frac{1}{2} [\text{Cos}(A - B) - \text{Cos}(A + B)]$$

$$\text{Cos } A \text{ Cos } B = \frac{1}{2} [\text{Cos}(A - B) + \text{Cos}(A + B)]$$

$$\text{Sen } A \text{ Cos } B = \frac{1}{2} [\text{Sen}(A - B) + \text{Sen}(A + B)]$$

9) $\int \text{Cos}(3\theta) \text{Cos}(-5\theta) d\theta$

Estrategia

Aplica correctamente la identidad $\text{Cos } A \text{ Cos } B = \frac{1}{2} [\text{Cos}(A - B) + \text{Cos}(A + B)]$

$$\int \text{Cos}(3\theta) \text{Cos}(-5\theta) d\theta = \int \frac{1}{2} [\text{Cos}(3\theta + 5\theta) + \text{Cos}(3\theta - 5\theta)] d\theta$$

$$\int \text{Cos}(3\theta) \text{Cos}(-5\theta) d\theta = \int \frac{1}{2} [\text{Cos}(8\theta) + \text{Cos}(-2\theta)] d\theta$$

$$\int \text{Cos}(3\theta) \text{Cos}(-5\theta) d\theta = \int \frac{1}{2} [\text{Cos}(8\theta)] d\theta + \int \frac{1}{2} [\text{Cos}(-2\theta)] d\theta$$

$$\int \text{Cos}(3\theta) \text{Cos}(-5\theta) d\theta = \frac{1}{16} \text{Sen}(8\theta) - \frac{1}{4} \text{Sen}(-2\theta) + C$$

$$10) \int \text{Sen}(5x) \text{Sen}(2x) dx$$

Haciendo $A = 5x$ y $B = 2x$ y expresando como:

$$\begin{aligned}\text{Sen } A \text{ Sen } B &= \frac{1}{2} [\text{Cos}(A - B) - \text{Cos}(A + B)] \\ \text{Sen}(5x) \text{Sen}(2x) &= \frac{1}{2} [\text{Cos}(5x - 3x) - \text{Cos}(5x + 2x)] \\ \text{Sen } 5x \text{ Sen } 2x &= \frac{1}{2} [\text{Cos}(2x) - \text{Cos}(7x)]\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \text{Sen}(5x) \text{Sen}(2x) dx = \frac{1}{2} \int [\text{Cos}(2x) - \text{Cos}(7x)] dx = \frac{1}{2} \int \text{Cos}(2x) dx - \frac{1}{2} \int \text{Cos}(7x) dx$$

Resolviendo las integrales, queda:

$$\int \text{Sen}(5x) \text{Sen}(2x) dx = \frac{1}{4} \text{Sen}(2x) - \frac{1}{14} \text{Sen}(7x) + C$$

$$11) \int x \text{Sen}(4x^2) \text{Cos}(2x^2) dx$$

Haciendo $A = 4x^2$ y $B = 2x^2$ y expresando como:

$$\begin{aligned}\text{Sen } A \text{ Cos } B &= \frac{1}{2} [\text{Sen}(A - B) + \text{Sen}(A + B)] \\ \text{Sen}(4x^2) \text{Cos}(2x^2) &= \frac{1}{2} [\text{Sen}(4x^2 - 2x^2) + \text{Sen}(4x^2 + 2x^2)] \\ \text{Sen}(4x^2) \text{Cos}(2x^2) &= \frac{1}{2} [\text{Sen}(2x^2) + \text{Sen}(6x^2)]\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\begin{aligned}\int x \text{Sen}(4x^2) \text{Cos}(2x^2) dx &= \frac{1}{2} \int x [\text{Sen}(2x^2) + \text{Sen}(6x^2)] dx \\ \int x \text{Sen}(4x^2) \text{Cos}(2x^2) dx &= \frac{1}{2} \int x \text{Sen}(2x^2) dx + \frac{1}{2} \int x \text{Sen}(6x^2) dx\end{aligned}$$

Resolviendo las integrales, queda:

$$\int x \operatorname{Sen}(4x^2) \operatorname{Cos}(2x^2) dx = -\frac{1}{8} \operatorname{Cos}(2x^2) - \frac{1}{24} \operatorname{Cos}(6x^2) + C$$

CASO V

Se presenta cuando el integrando contiene a la función Tangente o Cotangente elevadas a cualquier potencia entera positiva.

Se expresa como:

$\int \operatorname{Tan}^n u du$; $\int \operatorname{Cot}^n u du$, en donde “n” es cualquier número entero positivo.

Expresa:

$$\operatorname{Tan}^n(u) = \operatorname{Tan}^{n-2}(u)[\operatorname{Sec}^2(u) - 1]$$

$$\operatorname{Cot}^n(u) = \operatorname{Cot}^{n-2}(u)[\operatorname{Csc}^2(u) - 1]$$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{Tan}^3(2x) dx$

Haciendo $\operatorname{Tan}^3(2x) = \operatorname{Tan}(2x)[\operatorname{Sec}^2(2x) - 1] = \operatorname{Tan}(2x)\operatorname{Sec}^2(2x) - \operatorname{Tan}(2x)$,
sustituyendo en la integral, queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{Tan}^3(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} [\operatorname{Tan}(2x)\operatorname{Sec}^2(2x) - \operatorname{Tan}(2x)] dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{Tan}^3(2x) dx = \int = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{Tan}(2x)\operatorname{Sec}^2(2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{Tan}(2x) dx$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan^3(2x) dx = \left[\frac{1}{4} \tan^2(2x) - \frac{1}{2} \ln |\sec(2x)| \right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \left[\frac{1}{4} \tan^2(2x) - \ln \sqrt{\sec(2x)} \right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan^3(2x) dx = \left[\frac{1}{4} \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln \sqrt{\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right] - \left[\frac{1}{4} \tan^2(0) - \ln \sqrt{\sec(0)} \right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \tan^3(2x) dx = \frac{1}{4} - \ln \sqrt{2}$$

13) $\int \cot^5(3x) dx$

Haciendo $\cot^5(3x) = \cot^3(3x)[\csc^2(3x) - 1] = \cot^3(3x)\csc^2(3x) - \cot^3(3x)$,
sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \cot^5(3x) dx = \int [\cot^3(3x)\csc^2(3x) - \cot^3(3x)] dx$$

$$\int \cot^5(3x) dx = \int \cot^3(3x)\csc^2(3x) dx - \int \cot^3(3x) dx$$

Haciendo $\cot^3(3x) = \cot(3x)[\csc^2(3x) - 1] = \cot(3x)\csc^2(3x) - \cot(3x)$,
sustituyendo en la segunda integral, queda:

$$\int \cot^5(3x) dx = \int \cot^3(3x)\csc^2(3x) dx - \int [\cot(3x)\csc^2(3x) - \cot(3x)] dx$$

$$\int \cot^5(3x) dx = \int \cot^3(3x)\csc^2(3x) dx - \int \cot(3x)\csc^2(3x) dx + \int \cot(3x) dx$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$\int \cot^5(3x) dx = -\frac{1}{12} \cot^4(3x) + \frac{1}{6} \cot^2(3x) + \frac{1}{3} \ln |\sin(3x)| + C$$

CASO VI

Se presenta cuando el integrando contiene a la función Secante o Cosecante elevadas a una potencia entera par positiva. Si la potencia es entera impar positiva se resuelve por el método de integración por partes. Se expresa como:

$\int \sec^n u \, du; \int \csc^n u \, du$, en donde “n” es un exponente entero par positivo.

Expresa:

$$\sec^n u = (1 + \tan^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u$$

$$\csc^n u = (1 + \cot^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 u$$

14) $\int \csc^4 2x \, dx$

Reescribiendo la integral $\int \csc^4 2x \, dx$ como $\int \csc^2 2x \csc^2 2x \, dx$, utilizando la identidad $\csc^2 2x = \cot^2 2x + 1$ y sustituyendo $(\cot^2 2x + 1)$ en uno de los términos $(\csc^2 2x)$, queda:

$$\int \csc^4 2x \, dx = \int \csc^2 2x \csc^2 2x \, dx = \int (\cot^2 2x + 1) \csc^2 2x \, dx$$

Nota que el término $\csc^2 2x$ forma parte del du , por lo tanto conviene que $u = \cot 2x$. Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = \cot 2x, \quad du = -2 \csc^2 2x \, dx, \quad dx = \frac{du}{-2 \csc^2 2x}$$

Sustituyendo u y du en la integral y simplificando queda:

$$\int \csc^4 2x \, dx = \int (u^2 + 1) \csc^2 2x \frac{du}{-2 \csc^2 2x} = -\frac{1}{2} \int (u^2 + 1) du$$

$$\int \csc^4 2x \, dx = -\frac{1}{2} \int u^2 du - \frac{1}{2} \int du = -\frac{1}{2} \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2} u + C$$

$$\int \csc^4 2x \, dx = -\frac{1}{6} \cot^3 2x - \frac{1}{2} \cot 2x + C$$

CASO VII

Se presenta cuando el integrando contiene el producto de Tangente por Secante, o bien, el producto de Cotangente por Cosecante, en donde la Secante o la Cosecante están elevadas a una potencia entera par positiva. En este caso, dichas funciones se expresan como lo indica el Caso VI.

Se expresa como:

$\int \tan^m(u) \sec^n(u) du$; $\int \cot^m(u) \csc^n(u) du$, en donde “n” es un exponente entero par positivo.

Expresa:

$$\sec^n u = (1 + \tan^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u$$
$$\csc^n u = (1 + \cot^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 u$$

15) $\int \tan^2(x) \sec^4(x) dx$

Haciendo $\sec^4(x) = (1 + \tan^2 x)^{\frac{4-2}{2}} \sec^2(x) = (1 + \tan^2 x) \sec^2(x)$, multiplicando, resulta:

$$\sec^4(x) = \sec^2(x) + \tan^2(x) \sec^2(x)$$

Sustituyendo en la integral y simplificando, queda:

$$\int \tan^2(x) \sec^4(x) dx = \int \tan^2(x) [\sec^2(x) + \tan^2(x) \sec^2(x)] dx$$
$$\int \tan^2(x) \sec^4(x) dx = \int \tan^2(x) \sec^2(x) dx + \int \tan^4(x) \sec^2(x) dx$$

Resolviendo las integrales, queda:

$$\int \tan^2(x) \sec^4(x) dx = \frac{1}{3} \tan^3(x) + \frac{1}{5} \tan^5(x) + C$$

$$16) \int \cot^3(2x) \csc^4(2x) dx$$

Haciendo $\csc^4(2x) = (1 + \cot^2 2x)^{\frac{4-2}{2}} \csc^2(2x) = (1 + \cot^2 2x) \csc^2(2x)$, multiplicando, resulta:

$$\csc^4(2x) = \csc^2(2x) + \cot^2(2x) \csc^2(2x)$$

Sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \cot^3(2x) \csc^4(2x) dx = \int \cot^3(2x) [\csc^2(2x) + \cot^2(2x) \csc^2(2x)] dx$$

$$\int \cot^3(2x) \csc^4(2x) dx = \int \cot^3(2x) \csc^2(2x) dx + \int \cot^5(2x) \csc^2(2x) dx$$

Resolviendo las integrales, queda:

$$\int \cot^3(2x) \csc^4(2x) dx = \frac{-1}{8} \cot^4(2x) - \frac{1}{12} \cot^6(2x) + C$$

CASO VIII

Se presenta cuando el integrando contiene el producto de Tangente por Secante, o bien, el producto de Cotangente por Cosecante, en donde la Tangente o la Cotangente están elevadas a una potencia entera impar positiva. Si la potencia de Tangente o Cotangente es entera par positiva y la potencia de Secante o Cosecante es entera impar positiva, entonces se utiliza el método de integración por partes para resolver dicha integral.

Se expresa como:

$\int \tan^m(u) \sec^n(u) du$; $\int \cot^m(u) \csc^n(u) du$, en donde “m” es un exponente entero par positivo.

Expresa:

$$\tan^m u \sec^n u = \tan^{m-1} u \sec^{n-1} u \sec u \tan u; \quad \text{usar: } \tan^2 u = \sec^2 u - 1$$

$$17) \int \cot^3 \theta \csc^3 \theta \, d\theta$$

Reescribiendo la integral $\int \cot^3 \theta \csc^3 \theta \, d\theta$ como $\int \cot^2 \theta \csc^2 \theta \cot \theta \csc \theta \, d\theta$, utilizando la identidad $\csc^2 u - 1 = \cot^2 u$ y sustituyendo $(\csc^2 \theta - 1)$ en el término $(\cot^2 \theta)$, queda:

$$\begin{aligned} \int \cot^3 \theta \csc^3 \theta \, d\theta &= \int \cot^2 \theta \csc^2 \theta \cot \theta \csc \theta \, d\theta \\ \int \cot^3 \theta \csc^3 \theta \, d\theta &= \int (\csc^2 \theta - 1) \csc^2 \theta \cot \theta \csc \theta \, d\theta \end{aligned}$$

Conviene hacer la sustitución $u = \csc \theta$ y que el producto $\cot \theta \csc \theta$ sea parte del du . Haciendo cambio de variable, queda:

$$u = \csc \theta, \quad du = -\cot \theta \csc \theta \, d\theta, \quad d\theta = \frac{du}{-\cot \theta \csc \theta}$$

Sustituyendo u y du en la integral, y simplificando, queda:

$$\begin{aligned} \int \cot^3 \theta \csc^3 \theta \, d\theta &= \int (u^2 - 1) u^2 \cot \theta \csc \theta \frac{du}{-\cot \theta \csc \theta} \\ \int \cot^3 \theta \csc^3 \theta \, d\theta &= - \int (u^2 - 1) u^2 \, du = - \int (u^4 - u^2) \, du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C \\ \int \cot^3 \theta \csc^3 \theta \, d\theta &= -\frac{\csc^5 \theta}{5} + \frac{\csc^3 \theta}{3} + C \end{aligned}$$

$$18) \int \frac{\sin^3 x}{\tan^2 x} \, dx$$

Como esta integral no está en ningún caso, entonces conviene expresarla en función de senos y cosenos a través del uso de identidades:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\tan^2 x} \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \, dx = \int \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \sin x \cos^2 x \, dx$$

Se hace la sustitución:

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x \, dx$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\tan^2 x} \, dx = \int -u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

$$19) \int \tan^3 x \cot^2 x \, dx$$

Esta integral tampoco está en ningún caso, pero se sabe que $\tan x \cot x = 1$:

$$\int \tan^3 x \cot^2 x \, dx = \int \tan^2 x \cot^2 x \tan x \, dx = \int (\tan x \cot x)^2 \tan x \, dx$$

$$\int \tan^3 x \cot^2 x \, dx = \int 1 \tan x \, dx = \ln(\sec x) + C$$

20) Resuelve la ecuación diferencial dada haciendo $y' = dy/dx$

$$y' = \tan^4 x$$

SOLUCIÓN

Sustituyendo y' por dy/dx y despejando dy , resulta:

$$dy = \tan^4 x \, dx$$

Se integran ambos lados de la ecuación y el lado derecho se resuelve por Caso V de potencias de funciones trigonométricas:

$$dy = (\sec^2 x - 1) \tan^2 x \, dx$$

$$dy = (\sec^2 x \tan^2 x - \tan^2 x) \, dx$$

$$dy = [\sec^2 x \tan^2 x - (\sec^2 x - 1)] \, dx$$

$$dy = (\sec^2 x \tan^2 x - \sec^2 x + 1) \, dx$$

$$y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \text{ Multiplicando por (3)}$$

$$3y = \tan^3 x - 3 \tan x + 3x + C$$

21) El volumen del sólido que se genera al girar con respecto al eje X, la región limitada por las gráficas de $y = \cos x$; $y = 0$; $x = 0$ está dado por:

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

Calcula dicho volumen.

SOLUCIÓN

Aplicando Caso III, se sustituye $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx \right]$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2}$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi \right) - \frac{1}{4} \sin 0 \right]$$

$$V = \frac{\pi^2}{4} u^3$$



Caso especial. En este Q_R se presenta una integral que parece que se resuelve por caso trigonométrico; sin embargo, el mismo caso te indica utilizar el método de integración por partes.

EJERCICIO 2.2

Resuelve las siguientes integrales:

1) $\int \cos^3 4x \, dx$

2) $\int \sin^4 \left(\frac{t}{2} \right) dt$

3) $\int \sin^4 2x \cos^3 2x \, dx$

4) $\int \cos^4 \theta \sin^2 \theta \, d\theta$

5) $\int \cos(2t) \sin(3t) dt$

6) $\int \sin(7t) \sin(-2t) dt$

7) $\int \cot^5 5x \, dx$

8) $\int \csc^3 2t \, dt$

9) $\int \tan^3 2\theta \sec^4 2\theta \, d\theta$

10) $\int \tan^5 2t \sec^3 2t \, dt$

11) $\int \csc^5 2t \, dt$

12) $\int \cot^4 2t \csc^3 2t \, dt$